

УДК 519.633

КОМБИНИРОВАНИЕ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА С РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕДАХ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ¹⁾

© 2025 г. А.В. Фаворская^{1,2,*}, И.Б. Петров^{1,2,**}, А.А. Кожемяченко^{1,2,***}

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9, МФТИ РАН, Россия

² 117218 Москва, Нахимовский пр-т, 36, кор.1, НИИ системных исследований, Россия

*e-mail: aleanera@yandex.ru

**e-mail: petrov@mpt.ru

***e-mail: anton-kozhemyachenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.04.2024 г.

Переработанный вариант 03.04.2024 г.

Принята к публикации 08.11.2024 г.

В данной работе рассматривается пример совместного использования сеточно-характеристического метода на регулярных структурированных расчетных сетках и разрывного метода Галеркина на тетраэдальных сетках для решения трехмерной прямой задачи распространения упругих волн в геологической среде, состоящей из четырех слоев, представляемых в виде линейно-упругой среды, с разными параметрами и произвольными криволинейными границами. Для сшивки численных методов используется специальный алгоритм, учитывающий особенности перехода от нерегулярной тетраэдralной расчетной сетки к регулярной структурированной расчетной сетки в трехмерном пространстве. Приведен сравнительный анализ сходимости полученного комбинированного метода с сеточно-характеристическим методом на криволинейных структурированных расчетных сетках в зависимости от изменения шага по пространственным направлениям. Получено волновое поле модуля скорости распространения возмущения от источника. Библ. 32. Фиг. 14. Табл. 3.

Ключевые слова: численное моделирование, сеточно-характеристический метод, разрывный метод Галеркина, расчетные сетки, сейсморазведка, сейсмическая топография.

DOI: 10.31857/S0044466925020081, EDN: CBLLVU

1. ВВЕДЕНИЕ

Способы получения сейсмических и геофизических данных являются важным приложением в задачах науки о Земле. Некоторые данные могут быть получены в результате прямых измерений и наблюдений в результате природных и техногенных явлений, например, при эксплуатации сети широкополосных сейсмических станций [1], при измерении профиля сейсмических отражений вследствие подрыва динамита разной мощности [2], при использовании сейсмической томографии и анализе сейсмических волн и сейсмичности [3], методов анализа спутниковых изображений высокого разрешения [4]. При получении синтетических сейсмических данных широкое распространение получили численные подходы, основанные на технологии полноволновой сейсморазведки [5], в рамках которой действует предположение о слоистой геологической среде и рассматриваются отраженные, дифрагированные и рассеянные упругие волны.

Актуальными методами моделирования распространения волн в упругих и вязкоупругих средах являются различные конечно-разностные методы [6–8], конечно-элементные методы [9, 10], в частности разрывный метод Галеркина [11–13]. При этом активно разрабатываются их модификации в зависимости от степени анизотропности рассматриваемых сред [11, 12, 14], необходимости использования сложных криволинейных [11, 14, 15] границ для описания поверхностей и контактных областей, что приводит к дополнительным сложностям при построении регулярных и нерегулярных расчетных сеток [16, 17], тем не менее, в ряде случаев оказывается удобным использовать т.н. наложенные расчетные сетки [18–20]. В силу гиперболичности определяющих распространение упругих волн в геологической среде уравнений возможно использование их характеристических свойств, т.е. применить при переходе к конечно-разностной задаче сеточно-характеристический метод [20, 21].

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 20-71-10028), <https://rscf.ru/project/20-71-10028/>.

Комбинирование конечно-элементных подходов, в частности разрывного метода Галеркина, с другими численными методами является довольно популярной современной научной тематикой, так в [22] предложено сочетать конечно-элементный и конечно-разностный подходы для лучшей обработки граничных областей между изотропными упругими средами. В [23] используется промежуточный расчетный слой с разрывным методом Галеркина на структурированных сетках, в [24] внешний поток интегрируют с помощью квадратуры Гаусса по 3 точкам, значения в которых ищут с помощью интерполяционного полинома Лагранжа третьего порядка, узлы сеток в обеих работах совпадают. В данной работе предложено использовать совместно с сеточно-характеристическим методом на структурированных расчетных сетках разрывный метод Галеркина на тетраэдральных сетках для описания границ криволинейной формы так, чтобы избежать интегрирования и использования дополнительного расчетного слоя.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В геологических породах распространение сейсмических волн моделируется при помощи поиска решения следующей начально-краевой задачи:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t))^T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) = (\rho c_p^2 - 2\rho c_s^2) (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) \mathbf{I} + \rho c_p^2 (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))^T). \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) \mathbf{r} – радиус-вектор, t – время, ∇ – вектор-градиент, \otimes – тензорное произведение векторов, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = a_i b_j$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – скорость (производная смещений бесконечно малого элемента материала по времени), $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ – симметричный тензор напряжений Коши, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга, ρ – плотность геологической среды, c_p , c_s – скорости распространения продольных Р-волн и поперечных S-волн соответственно в рассматриваемой геологической среде.

На фиг. 1–4 представлен пример расчетной области геологической среды, состоящей из четырех слоев с криволинейными границами и различными упругими параметрами.

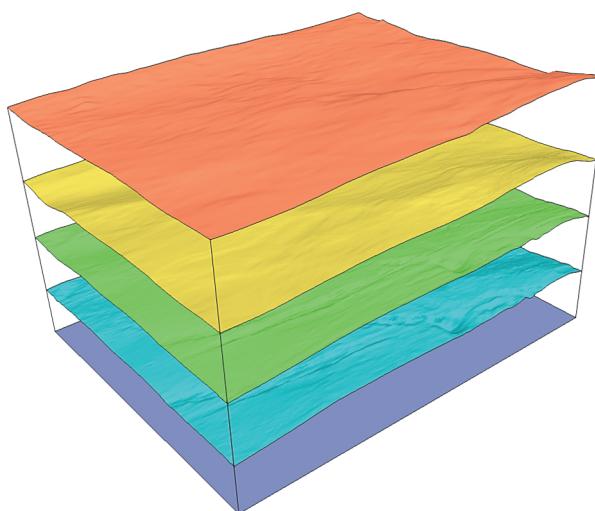
На поверхности геологической среды заданы точечный источник в виде импульса Риккера (3) с частотой 20 Гц условие свободной границы (4), на всех остальных внешних границах области интегрирования – неотражающие граничные условия, на границах раздела сред – контактные условия полного слипания (5):

$$(1 - 2(\pi f(t - t_0))^2) e^{-(\pi f(t - t_0))^2}, \quad (3)$$

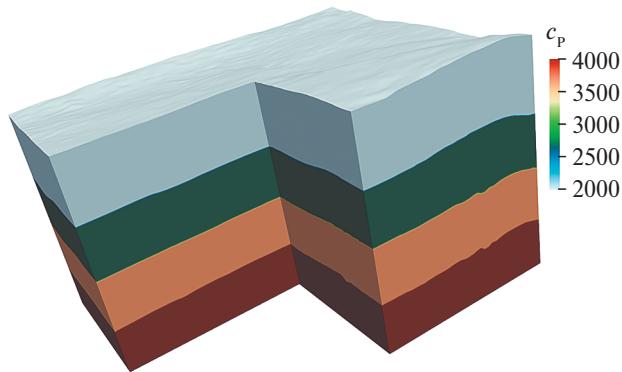
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad (5)$$

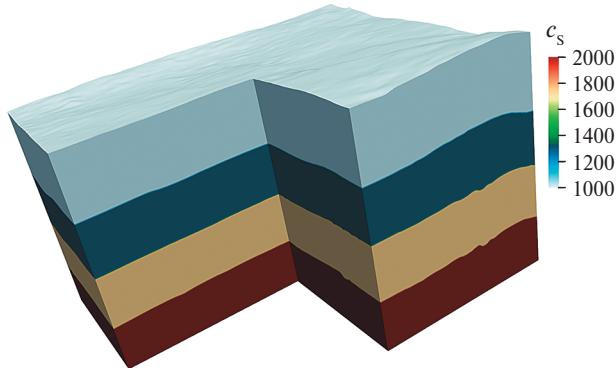
где \mathbf{n} – нормаль к поверхности раздела соседних геологических сред.



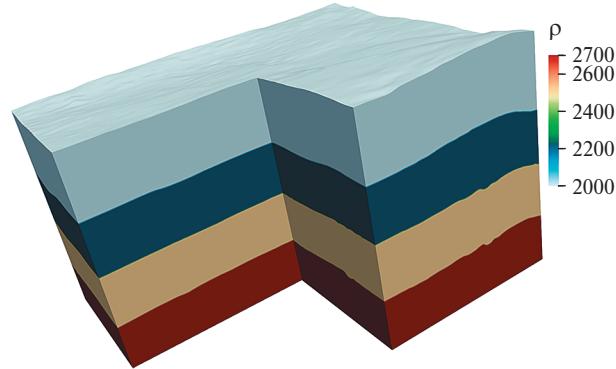
Фиг. 1. Геологическая модель: границы раздела геологических сред.



Фиг. 2. Геологическая модель: распределение скорости Р-волн.



Фиг. 3. Геологическая модель: распределение скорости S-волн.



Фиг. 4. Геологическая модель: распределение плотности.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

3.1. Сеточно-характеристический метод

Для численного решения системы уравнений (1), (2) применяется сеточно-характеристический метод. Систему в трехмерном случае можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q} + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T, \quad (7)$$

далее производится расщепление по пространственным направлениям и внутри каждой полученной одномерной гиперболической системы осуществляется переход к инвариантам Римана [25], используя следующие выражения (рассмотрим для определенности направление ОХ):

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^X &= v_X \mp \frac{1}{\rho c_p} \sigma_{XX}, \\ \omega_{3,4}^X &= v_Y \mp \frac{1}{\rho c_s} \sigma_{XY}, \\ \omega_{5,6}^X &= v_Z \mp \frac{1}{\rho c_s} \sigma_{XZ}, \\ \omega_7^X &= \sigma_{YZ}, \\ \omega_8^X &= \sigma_{YY} - \sigma_{ZZ}, \\ \omega_9^X &= \sigma_{YY} + \sigma_{ZZ} - 2k\sigma_{XX},\end{aligned}$$

где $k = 1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2}$.

Одномерные уравнения переноса с постоянными коэффициентами могут быть численно разрешены с учетом их характеристических свойств конечно-разностными схемами высокого порядка аппроксимации, например, используя шаблон схемы на фиг. 5, введя вдоль границ расчетной сетки дополнительный набор мнимых узлов [26].

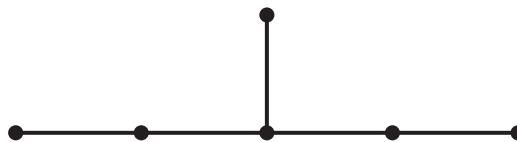
Полученные на верхнем временном слое значения инвариантов Римана используются для обратного перехода к неизвестным функциям из систем уравнений (1), (2) согласно следующим выражениям:

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{2} \{ \omega_1^X + \omega_2^X, \omega_3^X + \omega_4^X, \omega_5^X + \omega_6^X \}^T, \\ \sigma_{XX} &= \rho c_p (\omega_2^X - \omega_1^X) / 2, \\ \sigma_{XY,XZ} &= \rho c_s (\omega_{4,6}^X - \omega_{3,5}^X) / 2, \\ \sigma_{YZ} &= \omega_7^X, \\ \sigma_{YY,ZZ} &= (k \rho c_p (\omega_2^X - \omega_1^X) + \omega_9^X \pm \omega_8^X) / 2.\end{aligned}$$

3.2. Разрывный метод Галеркина

В [26] подробно описан алгоритм построения разрывного метода Галеркина при рассмотрении уравнений линейной упругой среды в двумерном случае. В трехмерном случае функции неизвестных из (6), (7) раскладывают по выбранному базису ортогональных функций $\Phi_i(\xi, \eta, \zeta)$, например, полиномам Дубинера, в единичном тетраэдре T_E :

$$\begin{aligned}q_k^m(x, y, z, t) &= \sum_{l=1}^{10} q_{pl}^m(t) \cdot \Phi_l^m(x, y, z) = \sum_{l=1}^{10} q_{pl}^m(t) \cdot \Phi_l(\xi^m(x, y, z), \eta^m(x, y, z), \zeta^m(x, y, z)), \quad (8) \\ \Phi_1(\xi, \eta, \zeta) &= 1, \\ \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) &= 4\xi - 1, \\ \Phi_3(\xi, \eta, \zeta) &= \xi + 3\eta - 1, \\ \Phi_4(\xi, \eta, \zeta) &= \xi + \eta + 2\zeta - 1, \\ \Phi_5(\xi, \eta, \zeta) &= 15\xi^2 - 10\xi + 1, \\ \Phi_6(\xi, \eta, \zeta) &= \xi^2 + 10\eta^2 + 8\xi\eta - 2\xi + 1,\end{aligned}$$



Фиг. 5. Шаблон разностной схемы для численного решения одномерных уравнений переноса.

$$\begin{aligned}\Phi_7(\xi, \eta, \zeta) &= \xi^2 + \eta^2 + 6\xi^2 + 2\xi\eta + 6\xi\zeta + 6\eta\zeta - 2\xi - 2\eta - 6\zeta + 1, \\ \Phi_8(\xi, \eta, \zeta) &= 6\xi^2 + 18\xi\eta - 7\xi - \eta - 3\eta + 1, \\ \Phi_9(\xi, \eta, \zeta) &= 6\xi^2 + 6\xi\eta + 12\xi\zeta - 7\xi - \eta - 2\zeta + 1, \\ \Phi_{10}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi^2 + 5\eta^2 + 6\xi\eta + 2\xi\zeta + 10\eta\zeta - 2\xi - 6\eta - 2\zeta + 1\end{aligned}$$

и получают полуdiscретную форму решаемой гиперболической системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_{pl}^{(m)}}{\partial t} |J| \int_{T_E} \Phi_l \Phi_k d\Omega + \sum_{j=1}^4 F_{pl}^{h,j,-} |S_j| \int_{(\partial T_E)_j} \Phi_l \Phi_k ds + \sum_{j=1}^4 F_{pl}^{h,j,+} |S_j| \int_{(\partial T_E)_j} \Phi_l \Phi_k ds - \\ - A_{pq}^* q_{pl}^{(m)} |J| \int_{T_E} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi} d\Omega - B_{pq}^* q_{pl}^{(m)} |J| \int_{T_E} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta} d\Omega - C_{pq}^* q_{pl}^{(m)} |J| \int_{T_E} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial \zeta} d\Omega = 0,\end{aligned}\quad (9)$$

где m – номер тетраэдра, p – компонента вектора (7), q_{pl}^m – коэффициенты в разложении решения по базису ортогональных функций в тетраэдре m , причем первый индекс соответствует компоненте вектора неизвестных, $|J|$ – якобиан из координат узлов рассматриваемого тетраэдра, $F_{pl}^{h,j,-}$ и $F_{pl}^{h,j,+}$ – выходящий и входящий потоки, $|S_j|$ – площадь j -й грани тетраэдра $(\partial T_E)_j$, матрицы A_{pq}^* , B_{pq}^* и C_{pq}^* выражаются через коэффициенты решаемой гиперболической системы уравнений (6) и координаты рассматриваемого тетраэдра. В уравнении (9) интегралы вычисляются аналитически и заранее, так как набор ортогональных базисных функций известен, а итоговую систему решают итерационным методом по времени, например, методами Рунге–Кутты. Реализация граничных и контактных условий выполняется также путем особого алгоритма расчета входящих потоков на граничных и контактных ячейках.

3.3. Комбинированный метод

Для создания комбинированного метода необходимо корректно вычислять решения вблизи границы между подобластями, в которых используются сеточно-характеристический метод и разрывный метод Галеркина соответственно. Условие устойчивости сеточно-характеристического метода можно записать следующим образом:

$$\tau \leq \min_a \frac{h_{a,k}}{c_{P,a}},$$

где τ – шаг по времени, $h_{a,k}$ – шаг по координате, a – номер расчетной сетки, k – направление, $k \in \{X, Y, Z\}$.

Условие устойчивости разрывного метода Галеркина может быть записано в виде

$$\tau \leq \frac{1}{2N+1} \min_{a,j} \frac{h_{a,j}}{c_P} = \frac{1}{5} \min \frac{h_{a,j}}{c_P},$$

где $h_{a,j}$ есть j -я высота тетраэдра под номером a , N – порядок полиномов базисных функций.

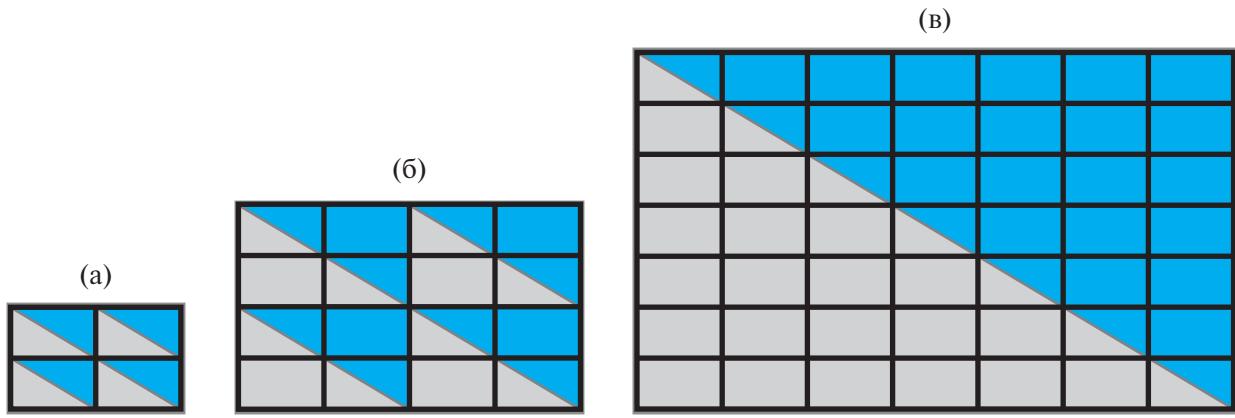
На выбор шагов по координатам структурированной сетки и размера тетраэдральных ячеек влияют длина Р- и S-волн, волны Рэлея, геометрия расчетной области. Возможно использование разных вариантов контакта структурированной регулярной и неструктурной тетраэдральной расчетных сеток (фиг. 6).

В двумерном случае задача максимальной минимальной высоты будет выполняться в случае равностороннего треугольника, контактирующего с регулярной расчетной сеткой, а в трехмерном случае мы имеем тетраэдры вида

$$(0, 0, 0); (h_X, 0, 0); (0, h_Y, 0); (x_0, y_0, z_0).$$

Высоты найдутся по следующим формулам:

$$\begin{aligned}H_{ABC} &= z_0, \\ H_{ACD} &= \frac{z_0 h_X}{\sqrt{(z_0)^2 + (x_0)^2}}, \\ H_{ABD} &= \frac{z_0 h_Y}{\sqrt{(z_0)^2 + (y_0)^2}},\end{aligned}$$



Фиг. 6. Варианты контакта структурированной регулярной и неструктурированной треугольной расчетных сеток с различной кратностью k , плоскость контакта: (а) — для $k = 2$, (б) — для $k = 4$, (в) — для $k = 7$.

$$H_{BCD} = \frac{h_X h_Y z_0}{\sqrt{(h_Y z_0)^2 + (h_X z_0)^2 + (h_X h_Y - h_X y_0 - h_Y x_0)^2}}.$$

Для тетраэдральной сетки максимальная кратность $(int)(5\sqrt{2}) = 7$, а в случае неравенства шагов по осям ОХ и ОY максимальная кратность составит $(int)(5\sqrt{1+\varphi^2})$, $h_{X/Y} = \varphi h_{Y/X}$, $\varphi < 1$.

Предполагая одинаковую ориентацию тетраэдров вдоль границы с регулярной сеткой, для трехмерного случая входящие потоки граничных тетраэдров при одинарной кратности рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} F_{pl}^{h,1,+} |S_1| \int_{(\partial T_E)_1} \Phi_l \Phi_k ds &= |S_1| G_{pa}^{1,+} (\mathbf{q}_{d_x,d_y})_a \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\eta \pm \\ &\pm |S_1| G_{pa}^{1,+} ((\mathbf{q}_{d_x \pm 1, d_y})_a - (\mathbf{q}_{d_x, d_y})_a) \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\eta \pm \\ &\pm |S_1| G_{pa}^{1,+} ((\mathbf{q}_{d_x, d_y \pm 1})_a - (\mathbf{q}_{d_x, d_y})_a) \int_0^1 \eta d\eta \int_0^{1-\eta} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\xi, \end{aligned}$$

при двойной кратности

$$\begin{aligned} F_{pl}^{h,1,+} |S_1| \int_{(\partial T_E)_1} \Phi_l \Phi_k ds &= |S_1| G_{pa}^{1,+} \Theta_a^{0,0} \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\eta + |S_1| G_{pa}^{1,+} \Theta_a^{1,0} \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\eta + \\ &+ |S_1| G_{pa}^{1,+} \Theta_a^{0,1} \int_0^1 \eta d\eta \int_0^{1-\eta} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\xi + |S_1| G_{pa}^{1,+} \Theta_a^{1,1} \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} \eta \cdot \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\eta + \\ &+ |S_1| G_{pa}^{1,+} \Theta_a^{2,0} \int_0^1 \xi^2 d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\eta + |S_1| G_{pa}^{1,+} \Theta_a^{0,2} \int_0^1 \eta^2 d\eta \int_0^{1-\eta} \Phi_k (\xi, \eta, 0) d\xi, \\ \Theta_a^{0,0} &= (\mathbf{q}_{d_x,d_y})_a, \\ \Theta_a^{1,0} &= \pm (4(\mathbf{q}_{d_x \pm 1, d_y})_a - 3(\mathbf{q}_{d_x, d_y})_a - (\mathbf{q}_{d_x \pm 2, d_y})_a), \\ \Theta_a^{0,1} &= \pm (4(\mathbf{q}_{d_x, d_y \pm 1})_a - 3(\mathbf{q}_{d_x, d_y})_a - (\mathbf{q}_{d_x, d_y \pm 2})_a), \\ \Theta_a^{2,0} &= 2(\mathbf{q}_{d_x, d_y})_a - 4(\mathbf{q}_{d_x \pm 1, d_y})_a + 2(\mathbf{q}_{d_x \pm 2, d_y})_a, \\ \Theta_a^{0,2} &= 2(\mathbf{q}_{d_x, d_y})_a - 4(\mathbf{q}_{d_x, d_y \pm 1})_a + 2(\mathbf{q}_{d_x, d_y \pm 2})_a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_a^{0,2} &= 2(\mathbf{q}_{d_x,d_y})_a - 4(\mathbf{q}_{d_x,d_y \pm 1})_a + 2(\mathbf{q}_{d_x,d_y \pm 2})_a, \\ \Theta_a^{1,1} &= 4((\mathbf{q}_{d_x \pm 1,d_y \pm 1})_a + (\mathbf{q}_{d_x,d_y})_a - (\mathbf{q}_{d_x \pm 1,d_y})_a - (\mathbf{q}_{d_x,d_y \pm 1})_a), \\ G_{pq}^{1,+} &= T_{pq}^{m_1} \frac{1}{2} R_{qb} (\Lambda_{br} - |\Lambda_{br}|) R_{rs}^{-1} (T_{sa}^{m_1})^{-1}, \\ \Lambda_{br} &= \text{diag} \{-c_p, -c_s, -c_s, 0, 0, 0, c_s, c_s, c_p\},\end{aligned}$$

где $(\mathbf{q}_{d_x,d_y})_a$ есть a -я компонента вектора неизвестных \mathbf{q} в точке регулярной сетки с индексами d_x, d_y по осям ОХ, ОY соответственно. Точки $\{d_x, d_y\}, \{d_x \pm 1, d_y\}, \{d_x, d_y \pm 1\}$ совпадают с точками горизонтальной грани тетраэдра. $T_{pq}^{m_1}$ – матрица поворота 1-й грани, R_{qb} – матрица, составленная из собственных векторов рассматриваемой гиперболической системы. Отметим, что вариант вычисления входных потоков с большей чем 2 кратностью делает необходимым вычисления в дополнительных узлах регулярной структурированной сетки, вариант с кратностью 1 предполагает потерю точности вычисления входных потоков, поэтому вариант с кратностью 2 является наиболее оптимальным.

При реализации последовательной версии алгоритма вычислений в трехмерном случае вначале заполняют значения в мнимых узлах регулярной расчетной сетки на границе с неструктурированной тетраэдральной сеткой путем использования формулы (8). Затем проводят вычисления во внутренних и граничных узлах сеточно-характеристическим методом для нахождения решения на следующем временном слое и выделяют множество точек вдоль границы с неструктурированной сеткой на n шаге интегрирования и на $n + 1/2$, используя выражение:

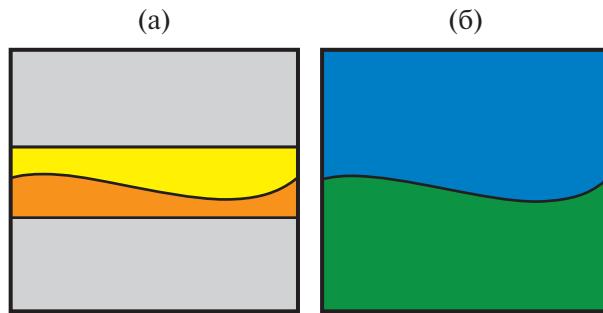
$$\mathbf{q}_d^{n+1/2} = \frac{\mathbf{q}_d^n + \mathbf{q}_d^{n+1}}{2}.$$

Далее выполняется использование предложенного подхода к комбинированию сеточно-характеристического метода и разрывного метода Галеркина, рассмотренных ранее. При распараллеливании используется алгоритм разбиения отдельных расчетных сеток по процессам. При этом при разбиении тетраэдральной сетки используется метод на основе задачи о разбиении графа на домены [27–29] с использованием стандартной модели графа. Существуют следующие пакеты, осуществляющие декомпозицию неструктурированных расчетных тетраэдральных сеток: METIS, JOSTLE, SCOTCH, PT-SCOTCH, CHACO и PARTY, PARMETIS, ZOLTAN. В рассматриваемой задаче распространения упругих волн декомпозиция расчетной сетки статическая и выполняется на этапе препроцессинга, в связи с чем допустимо использовать не параллельные пакеты для декомпозиции неструктурированной сетки.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В этом разделе представлены результаты численного моделирования.

Для отладки и проверки сходимости комбинированного метода были проведены тестовые расчеты для последовательной версии алгоритма вычислений в расчетной области в виде куба из одного материала с искусственной криволинейной границей между расчетными сетками, в которых использовался метод Галеркина (желтая и оранжевая на фиг. 7а), в оставшейся области использовался сеточно-характеристический метод для регулярных структурированных расчетных сеток (серые на фиг. 7а). Тестирование проводилось при числе Куранта 0.4. Результаты расчетов с использованием комбинированного метода для разных шагов по координате



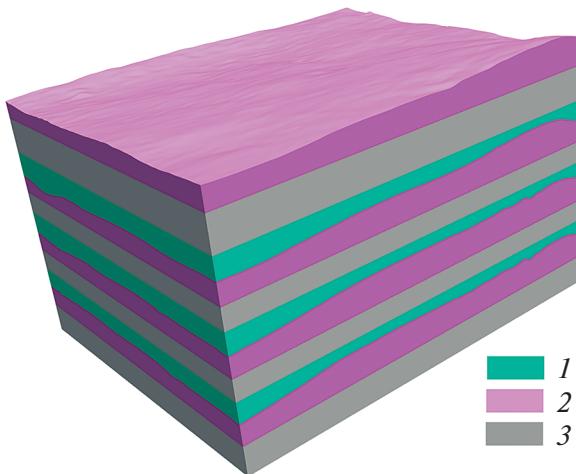
Фиг. 7. Схема положения границы между расчетными сетками в разрезе: (а) – комбинированный метод, (б) – сеточно-характеристический метод на криволинейных структурированных расчетных сетках.

Таблица 1. Исследование сходимости комбинированного метода: h – шаг по координате, м, $E\{L_1\}$ – ошибка по норме L_1 , $E\{L_\infty\}$ – ошибка по норме L_∞ , N_1 – порядок сходимости по норме L_1 , N_∞ – порядок сходимости по норме L_∞ .

h	$E\{L_1\}$	$E\{L_\infty\}$	N_1	N_∞
25	5145	0.280	–	–
12.5	1258	0.067	2.032	2.070
6.25	339	0.019	1.890	1.807
3.125	92	0.005	1.879	1.809

Таблица 2. Исследование сходимости сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках: h – шаг по координате, м, $E\{L_1\}$ – ошибка по норме L_1 , $E\{L_\infty\}$ – ошибка по норме L_∞ , N_1 – порядок сходимости по норме L_1 , N_∞ – порядок сходимости по норме L_∞ .

h	$E\{L_1\}$	$E\{L_\infty\}$	N_1	N_∞
25	4927	0.249	–	–
12.5	1460	0.076	1.755	1.720
6.25	440	0.023	1.730	1.713
3.125	132	0.007	1.733	1.712



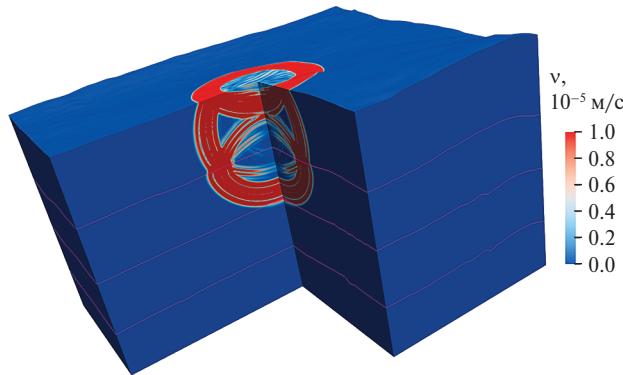
Фиг. 8. Расчетные сетки при использовании комбинированного метода: 1, 2 – тетраэдральные, 3 – регулярные структурированные.

приведены в табл. 1. Для сравнения в табл. 2 приведены результаты расчетов с использованием ранее разработанного сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках (синяя и зеленая на фиг. 7б) [25, 30–32] в этой же постановке. Видно, что предложенный комбинированный метод обладает более высоким порядком сходимости. Также в табл. 3 приведено сравнение двух методов по затратам вычислительных ресурсов, из которого следует, что при измельчении расчетной сетки затраты становятся меньше, так как доля объема вблизи криволинейных границ, разбиваемого на тетраэдры, уменьшается.

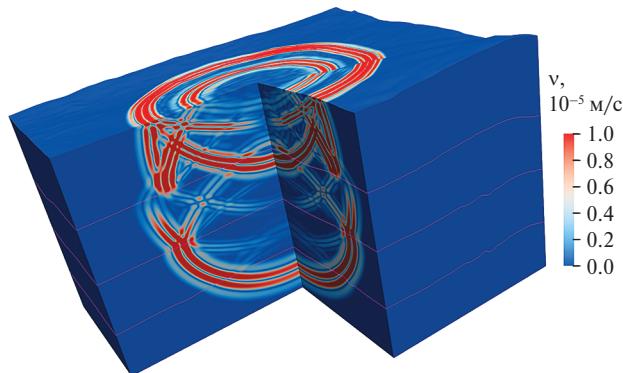
На фиг. 8 приведена расчетная область из фиг. 1–4, поделенная на тетраэдральные, прилегающие к поверхности и криволинейным границам геологических пород, и регулярные структурированные расчетные сетки для использования комбинированного метода. В регулярных сетках шаг вдоль направлений OX, OY равен 12.5 м, OZ – 10 м. Шаг по времени составил 0.4 мс, выполнено 2800 итераций по времени. В случае использования сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках для границ соседних областей создается расчетная сетка по специальному алгоритму, изложенному в работах [25, 30–32]. Полученные волновые поля модуля скорости с помощью сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках и комбинированного метода приведены для сравнения на фиг. 9–11 и фиг. 12–14 соответственно.

Таблица 3. Затраты оперативной памяти и времени вычислений: h – шаг по координате, м, СХМ-РМГ – комбинированный метод, СХМ-КСС – сеточно-характеристический метод на криволинейных структурированных сетках, M – затраты оперативной памяти, Гб, T – время вычислений, ч.

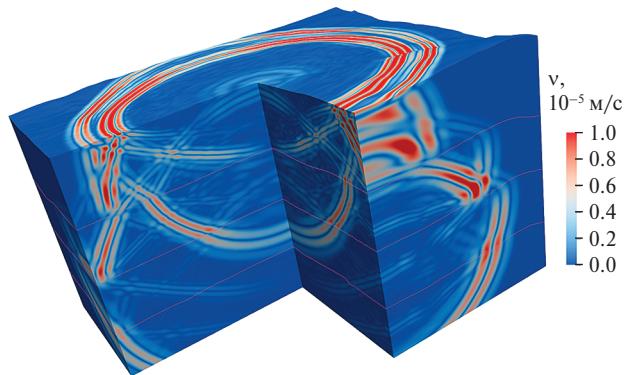
Метод	СХМ-РМГ		СХМ-КСС		
	h	M	T	M	
25		1.808	0.683	0.56	0.183
12.5		7.616	5	4.16	2.716
6.25		27.9	35	33.8	43
3.125		170.5	495	241.7	726



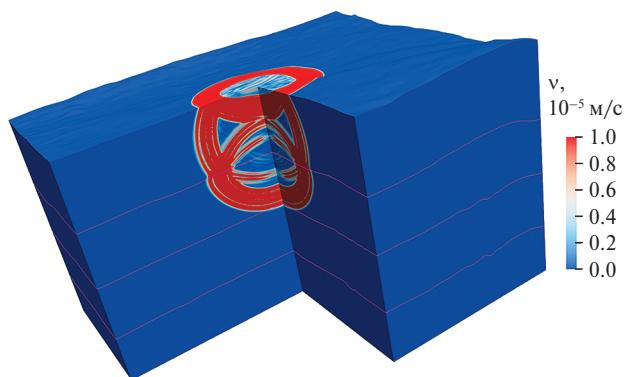
Фиг. 9. Волновая картина модуля скорости, полученная с использованием сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках: $t = 0.448$ с.



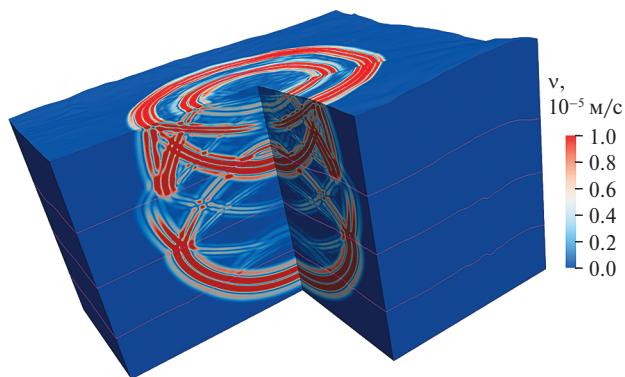
Фиг. 10. Волновая картина модуля скорости, полученная с использованием сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках: $t = 0.784$ с.



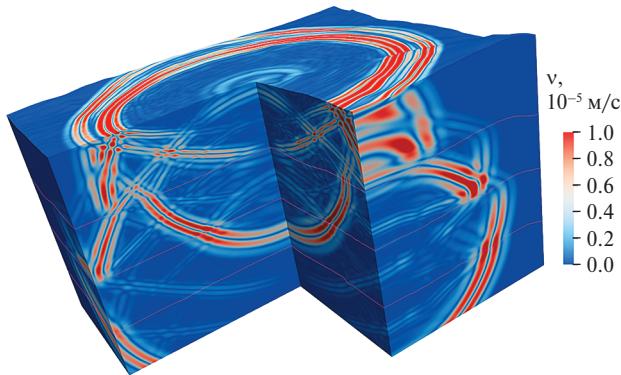
Фиг. 11. Волновая картина модуля скорости, полученная с использованием сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных сетках: $t = 1.12$ с.



Фиг. 12. Волновая картина модуля скорости, полученная с использованием комбинированного метода: $t = 0.448$ с.



Фиг. 13. Волновая картина модуля скорости, полученная с использованием комбинированного метода: $t = 0.784$ с.



Фиг. 14. Волновая картина модуля скорости, полученная с использованием комбинированного метода: $t = 1.12$ с.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные авторами результаты показывают сеточную сходимость предложенного алгоритма и дают основания использовать совместно сеточно-характеристический метод на регулярных сетках и разрывный метод Галеркина на тетраэдralных сетках применительно к задачам распространения упругих волн в сплошных средах, в частности для прямых задач сейсмической разведки углеводородов и других полезных ископаемых. Полученный комбинированный метод может быть применен и к другим объектам сложной формы, так как позволяет описывать сложные граници путем построения тетраэдralных расчетных сеток и экономить вычислительные ресурсы при использовании структурированных регулярных расчетных сеток в остальных подобластях интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moidaki M.* New shear wave splitting measurements using broadband seismic data recorded by the BX seismological network in Botswana // Data in Brief. 2023. V. 48. Art. № 109078.
2. *Li H., Gao R., Huang X., Wang H., Guo X., Liang H., Tan X., Liu X., Yang Z.* Triassic convergence and tectonic evolution of the West Qinling orogen: Constraints from reflection-seismology imaging // Gondwana Research. 2023. V. 122. P. 1–10.
3. *Cai Y., Wu J., Liu Y., Gao S.* Advances in seismological methods for characterizing fault zone structure // Earthquake Science. 2024. V. 37. № 2. P. 122–138.
4. *Emetere M.E.* Modified satellite remote sensing technique for hydrocarbon deposit detection // J. of Petroleum Science and Engng. 2019. V. 181. Art. № 106228.
5. *Li D., Qi L.* Full wave seismic exploration technology // Petroleum Exploration and Development. 2022. V. 49. № 3. P. 586–595.
6. *Li X., Zhang Z., Ren Q., Liu H., Xue F.* Numerical simulation of seismic wave in elastic and viscoelastic TTI media // Earthquake Science. 2020. V. 33. № 3. P. 116–129.
7. *Mao Q., Huang J., Mu X., Yang J., Zhang Y.* Accurate simulations of pure-viscoacoustic wave propagation in tilted transversely isotropic media // Petroleum Science. 2024. V. 21. P. 866–884.
8. *Benito J.J., Urena F., Gavete L., Salete E., Urena M.* Implementations with generalized finite differences of the displacements and velocity-stress formulations of seismic wave propagation problem // Appl. Math. Modelling. 2017. V. 52. P. 1–14.
9. *Kolman R., Okrouhlik M., Berezovski A., Gabriel D., Kopacka J., Plesek J.* B-spline based finite element method in one-dimensional discontinuous elastic wave propagation // Appl. Math. Modelling. 2017. V. 46. P. 382–395.
10. *Davoodi M., Pourdeilami A., Jahankhah H., Jafari M.K.* Application of perfectly matched layer to soil-foundation interaction analysis // J. of Rock Mechanics and Geotechnical Engng. 2018. V. 10. № 4. P. 753–768.

11. *He X., Li J., Huang X., Zhou Y.* Solving elastic wave equations in 2D transversely isotropic media by a weighted Runge-Kutta discontinuous Galerkin method // *Petroleum Science*. 2023. V. 20. № 2. P. 827–839.
12. *Duan W.* Time domain numerical modelling of guided wave excitation in fluid-filled pipes // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2022. V. 210. Art. № 103813.
13. *Antonietti P.F., Mazzieri I., Migliorini F.* A discontinuous Galerkin Time Integration Scheme for Second Order Differential Equations With Applications to Seismic Wave Propagation Problems // *Comput. & Math. with Applications*. 2023. 134. P. 87–100.
14. *Chen K., Liu L., Xu L., Hu F., Yang Y., Zuo J., Zhang L., Zhao Y.* Linearized waveform inversion for vertical transversely isotropic elastic media: Methodology and multi-parameter crosstalk analysis // *Petroleum Science*. 2024. V. 21. № 1. P. 252–271.
15. *Li X., Koene E., Manen D., Robertsson J., Curtis A.* Elastic immersive wavefield modelling // *J. of Comput. Physics*. 2022. V. 451. Art. № 110826.
16. *Benito J.J., Urena F., Urena M., Salete E., Gavete L.* A new meshless approach to deal with interfaces in seismic problems // *Appl. Math. Modelling*. 2018. V. 58. P. 447–458.
17. *Tavelli M., Dumbser M., Charrier D.E., Rannabauer L., Weinzierl T., Bader M.* A simple diffuse interface approach on adaptive Cartesian grids for the linear elastic wave equations with complex topography // *J. of Comput. Physics*. 2019. V. 386. P. 158–189.
18. *Tavelli M., Dumbser M.* Arbitrary high order accurate space–time discontinuous Galerkin finite element schemes on staggered unstructured meshes for linear elasticity // *J. of Comput. Physics*. 2018. V. 366. P. 386–414.
19. *Lisitsa V.* Dispersion analysis of discontinuous Galerkin method on triangular mesh for elastic wave equation // *Appl. Math. Modelling*. 2016. V. 40. № 7–8. P. 5077–5095.
20. *Kozhemyachenko A.A., Favorskaya A.V.* Grid convergence analysis of grid-characteristic method on Chimera meshes in ultrasonic nondestructive testing of railroad rail // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2023. V. 63. № 10. P. 1886–1903.
21. *Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V.* Grid-Characteristic Method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves Scattering on Geological Fractures // *Minerals*. 2022. V. 12. № 12. Art. № 1597.
22. *Gao L., Keyes D.* Combining finite element and finite difference methods for isotropic elastic wave simulations in an energy-conserving manner // *J. of Comput. Phys.* V. 378. P. 665–685.
23. *Lisitsa, V., Tcheverda V., Botter C.* Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // *J. of Comput. Phys.* 2016. V. 311. № 15. P. 142–157.
24. *Huang J., Hu T., Jianyong S., Li. Y., Yu Z., Liu L.* A new hybrid method based on discontinuous Galerkin method and staggered-grid method for scalar wavefield modeling with rough topography // *Geophysical Prospecting*. 2021. V. 70. № 3. P. 441–458.
25. *Kozhemyachenko A., Favorskaya A., Pesnya E., Stetsyuk V.* Modification of the Grid-Characteristic Method on Chimera Meshes for 3D Problems of Railway Non-destructive Testing // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44. № 1. P. 376–386.
26. *Favorskaya A.V., Petrov I.B.* Combination of grid-characteristic method on regular computational meshes with discontinuous Galerkin method for simulation of elastic wave propagation. 2021. V. 42. № 7. P. 1652–1660.
27. *Walshaw C., Cross M.* Parallel optimisation algorithms for multilevel mesh partitioning // *Parallel Computing*. 2000. V. 26. № 12. P. 1635–1660.
28. *Borrell R., Cajas J. C., Mira D., Taha A., Koric S., Vazquez M., Houzeaux G.* Parallel mesh partitioning based on space filling curves // *Computers & Fluids*. 2018. V. 173. P. 264–272.
29. *Horne W. J., Mahesh K.* A massively-parallel, unstructured overset method for mesh connectivity // *J. of Comput. Phys.* 2019. V. 376. P. 585–596.

30. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // J. of Comput. Phys. 2021. V. 446. Art. № 110637.
31. Favorskaya A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Grid-characteristic method on joint structured regular and curved grids for modeling coupled elastic and acoustic wave phenomena in objects of complex shape // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 4. P. 512–525.
32. Khokhlov N. I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures // Minerals. 2022. V. 12. № 12. Art. № 1597.

COMBINING THE GRID-CHARACTERISTIC METHOD WITH THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR MODELING WAVE PROPAGATION IN LINEAR ELASTIC MEDIA IN THE THREE-DIMENSIONAL CASE

A. V. Favorskaya^{a,b,*}, I. B. Petrov^{a,b,}, A. A. Kozhemyachenko^{a,b,***}**

^a*MIPT, Institutskii per. 9, Moscow region, 141701 Dolgoprudny, Russia*

^b*Research Institute of Systems Research, Nakhimovskii pr. 36/1, 117218 Moscow, Russia*

*e-mail: aleanera@yandex.ru

**e-mail: petrov@mpt.ru

***e-mail: anton-kozhemyachenko@yandex.ru

Received April 3, 2024

Revised April 3, 2024

Accepted November 8, 2024

Abstract. This paper considers an example of the combined use of the grid-characteristic method on regular structured computational grids and the discontinuous Galerkin method on tetrahedral grids to solve a three-dimensional direct problem of elastic wave propagation in a geological medium consisting of four layers represented as a linear-elastic medium with different parameters and arbitrary curvilinear boundaries. A special algorithm is used to stitch the numerical methods, taking into account the features of the transition from an irregular tetrahedral computational grid to a regular structured computational grid in three-dimensional space. A comparative analysis of the convergence of the resulting combined method with the grid-characteristic method on curvilinear structured computational grids is given depending on the change in the step in spatial directions. The wave field of the modulus of the disturbance propagation velocity from the source is obtained.

Keywords: numerical modeling, grid-characteristic method, discontinuous Galerkin method, computational grids, seismic exploration, seismic topography