

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПУАЗЕЙЛЕВСКИХ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ<sup>1)</sup>

© 2025 г. Б.В. Семисалов<sup>1,3,\*</sup>, И.А. Бугоец<sup>1,2,3,\*\*\*</sup>, Л.И. Куткин<sup>2,3,\*\*\*</sup>, В.П. Шапеев<sup>2,3,\*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>630090 Новосибирск, ул. Акад. Коптюга, 4, Институт матем. СО РАН, Россия

<sup>2</sup>630090 Новосибирск, ул. Институтская, 4/1, Институт теор. и прикл. механ. СО РАН, Россия

<sup>3</sup>630090 Новосибирск, ул.Пирогова, 2, Новосибирский гос. университет, Россия

\*e-mail: vibis87@gmail.com

\*\*e-mail: i.bugoets@g.nsu.ru

\*\*\*e-mail: l.kutkin@g.nsu.ru

\*\*\*\*e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Поступила в редакцию 10.09.2024 г.

Переработанный вариант 02.11.2024 г.

Принята к публикации 08.11.2024 г.

Получена система нестационарных уравнений с частными производными, описывающая неизотермические течения пуазейлевского типа несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с сечением между двумя софокусными эллипсами. Для системы поставлена начально-краевая задача, описывающая течение в дюзее 3D принтера с нагревательным элементом при импульсном изменении градиента давления в дюзее и температуры элемента. Для численного решения задачи разработан алгоритм, учитывающий особенности искомых функций и основанный на полиномиальных и дробно-рациональных приближениях по пространственным переменным и на применении неявной разностной схемы по времени. Исследованы распределения скорости и температуры жидкости в канале, зависимости потока и средней температуры от времени, рассчитаны критические соотношения между величинами амплитуд и продолжительностей импульсных воздействий на жидкость, при задании которых течение теряет устойчивость. Библ. 32. Фиг. 9. Табл. 3.

**Ключевые слова:** полимерная жидкость, мезоскопическая реологическая модель, импульсное воздействие, течение Пуазеля, потеря устойчивости, критические соотношения значений параметров, полином с ядром Дирихле, дробно-рациональная барицентрическая интерполяция.

DOI: 10.31857/S0044466925020072, EDN: CBMRJD

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие технологий экструзии, печати и напыления с применением новых электропроводящих полимерных материалов представляет актуальную задачу [1,2]. Применение здесь методов предсказательного математического моделирования наталкивается на проблему поиска критических значений параметров реологии жидкости и технологического процесса, при которых течения в каналах принтеров и экструдеров теряют устойчивость и приобретают хаотичный и турбулентный характер [3]. Возникновение таких режимов течения крайне нежелательно, поскольку приводит к дефектам изделий и не позволяет управлять технологическим процессом.

Необходимо отметить, что процесс потери устойчивости течения и переход к турбулентности в вязкоупругой жидкости является намного более сложным, чем в классической ньютоновской жидкости. В частности, такой переход может реализоваться при сколь угодно малых значениях числа Рейнольдса  $Re$ , что связано с упругими свойствами молекул полимера. Систематизация экспериментальных данных и вывод общих критериев перехода к упругой турбулентности в течениях с изогнутыми линиями тока обсуждается в [4]. В обзорной статье [3] и статьях [5, 6] дан анализ критериев перехода к различным видам турбулентных течений в полимерных растворах: упругому, инерционному и упруго-инерционному турбулентным режимам, которые реализуются при

<sup>1)</sup> Работа Семисалова Б.В. выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008); работа И.А. Бугоца, Л.И. Куткина, В.П. Шапеева выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00499).

различных критических соотношениях между величиной  $Re$ , значением концентрации полимерной фазы и величиной безразмерного времени релаксации полимерного раствора – числа Вайсенберга  $W$ . В указанных статьях отмечено, что математическое описание этих переходов в случае течений с прямыми линиями тока типа течений Пуазеля и Куэтта представляет собой открытую проблему.

Недавно в [7, 8] был предложен новый подход к решению этой проблемы, использующий мезоскопические модели динамики полимерных сред [9, 10]. В рамках этого подхода потеря устойчивости стационарного течения типа Пуазеля, объясняется тем, что действительное классическое решение соответствующих уравнений мезоскопической модели *перестает существовать (разрушается)*. При этом разрушение решения в процессе установления объясняется возникновением у его аналитического продолжения в комплексную плоскость особой точки, которая при изменении параметров модели или с течением времени может выходить в область решения задачи. Следуя [7], можно заключить, что, по крайней мере, в стационарной осесимметричной задаче особая точка решения как функции радиальной координаты расположена на действительной прямой. Указанный подход развит и для анализа нестационарных эффектов в рамках одномерной мезоскопической модели, см. [11]. Предсказания о соотношениях между критическими значениями  $Re$  и  $W$  – их обратная пропорциональность, полученные при использовании нового подхода, согласуются с результатами ряда экспериментов, см. заключение в [7]. Из анализа, проведенного в [7, 8, 11] следует, что адекватное описание потери устойчивости течений с прямыми линиями тока требует учета анизотропии потока, связанной с микроструктурой полимера, а именно с размером и ориентацией его макромолекул.

Вместе с тем заметим, что течения, возникающие в каналах экструдеров и 3D принтеров, существенно отличаются от установившихся течений типа Пуазеля. Например, в технологиях печати жидкость подвергается импульсным воздействиям температуры и давления, за счет чего она порциями выходит из дюзы принтера. Такие воздействия приводят к сложному вязкоупругому отклику полимерного материала, в связи с чем задача становится существенно нестационарной, и критерии потери устойчивости должны быть пересмотрены.

В этой работе исследовано влияние импульсных воздействий градиента давления и температуры в канале печатающего устройства на реализуемость пуазелевского течения. Конкретно, рассмотрена дюза с сечением эллиптической формы с нагревательным элементом, представляющим тонкую пластину внутри дюзы. Реологические параметры жидкости и технологического процесса заданы в соответствии с данными опубликованными в открытой печати, собранными в приложении статьи [12]. Данна постановка начально-краевой задачи, описывающей течение, разработан алгоритм численного решения задачи, и проведено моделирование нестационарного течения с начальными данными, соответствующими состоянию покоя жидкости. В рассматриваемой постановке после выхода течения жидкости на стационарный режим задается резкий скачок давления в канале или температуры нагревательного элемента. Проводится анализ распределений скорости и температуры жидкости и определяются параметры импульсных воздействий, при которых реализуется выход на стационарный режим, либо расходимость соответствующего приближенного решения, что на практике можно ассоциировать с потерей устойчивости и переходом к сложной турбулентной динамике.

Прежде чем приступить к математической формулировке проблемы, отметим еще два важных фактора. Во-первых, мы будем опираться на подход к выводу разрешающих систем уравнений, предложенный в [13, 14]. Однако для учета геометрии области решения задачи и процесса теплопереноса требуется адаптация этого подхода, что несколько усложняет выкладки и позволяет получить новые постановки. Во-вторых, существенная новизна содержится в разработанном способе аппроксимации решений по пространственным переменным: используются прямые произведения полинома с ядром Дирихле и новой дробно-рациональной барицентрической интерполяции [15, 16]. Последняя позволяет адаптировать сетку из узлов Чебышёва к особенностям искомых функций, которые, как указано выше, могут вплотную подходить к границе области задачи. Использование таких приближений позволяет с высокой точностью определить критические значения параметров моделируемого физического процесса.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основываясь на уравнениях механики жидкости [17–19], дополненных реологическими соотношениями из [9, 20], следуя [12], запишем уравнения *реологической мезоскопической модели Покровского–Виноградова*, которая описывает неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Эти уравнения в безразмерном виде в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  выглядят следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{Re} \operatorname{div}(Y\Pi) + (\operatorname{Fr}^{-2} - Ga(Y - 1))\mathbf{e}_g, \quad (2)$$

$$\frac{da_{ij}}{dt} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_l} a_{lj} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} a_{li} - \frac{1}{W} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mathfrak{L}_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{Pr} \left( \Delta Y + C_d Y \Phi \right). \quad (4)$$

Здесь  $t$  — время;  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ ,  $P$  — давление;

$a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  — компоненты симметрического тензора анизотропии  $\Pi$  второго ранга;

$\text{div}(Y\Pi) = (\text{div}(Y\mathbf{a}_1), \text{div}(Y\mathbf{a}_2), \text{div}(Y\mathbf{a}_3))^T$  — вектор;

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  — столбцы симметрической матрицы  $\Pi = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ;

$Y = \frac{T}{T_0}$ ,  $T$  — температура,  $T_0 = 293.15$  К = 20°C — температура окружающей среды,

$$\mathfrak{L}_{ij} = \left( \frac{a_{ij}}{W} + \frac{\bar{k}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}{3} a_{ij} + \beta(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \right) / \bar{\tau}_0(Y), \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$\bar{k} = k - \beta$ ,  $k, \beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) — феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, связанные с анизотропией (величина  $\beta$  учитывает ориентацию макромолекулярного клубка, число  $k$  — его размеры, см. [21, 22]), ниже полагаем  $k = 1.2\beta$ ;

$$\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0(Y) = \frac{J(Y)}{Y}, \quad J(Y) = \exp \left( -\bar{E}_A \frac{Y-1}{Y} \right);$$

$\text{Re} = \frac{\rho u_H l}{\eta_0^*}$  — число Рейнольдса; константа  $\rho$  — плотность среды;

$$W = \frac{\tau_0^* u_H}{l}$$

$\eta_0^*, \tau_0^*$  — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации при  $T = T_0$ ;

$\Phi$  — диссипативная функция (ее выражение приведено в [12], см. также важные комментарии по поводу термодинамической согласованности модели во введении статьи [23]),  $C_d$  — коэффициент диссипации уравнения теплопроводности (4);

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)$$

— полная производная по времени;

$$Ga = Ra/Pr, \quad \bar{E}_A = E_A/T_0;$$

постоянные  $Ra$  (число Рэлея),  $Pr$  (число Прандтля),  $Fr$  (число Фруда),  $E_A$  (энергия активации) описаны в [9, 17], их значения, соответствующие рассмотренной постановке, указаны в приложении статьи [12],  $\mathbf{e}_g$  — единичный вектор, определяющий направление силы тяжести (зададим его противоположно направленным оси  $x$ , см. фиг. 1).

Далее для координат используем обозначения  $x, y, z$  ( $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ ).

Система (1)–(4) записана в безразмерном виде: время  $t$ ; координаты  $x, y, z$ ; компоненты вектора скорости  $u_1, u_2, u_3$ ; давление  $P$ ; компоненты тензора анизотропии  $a_{ij}$  отнесены к  $l/u_H, l, u_H, \rho u_H^2, W/3$  соответственно, где  $l$  — характерная длина,  $u_H$  — характерная скорость.

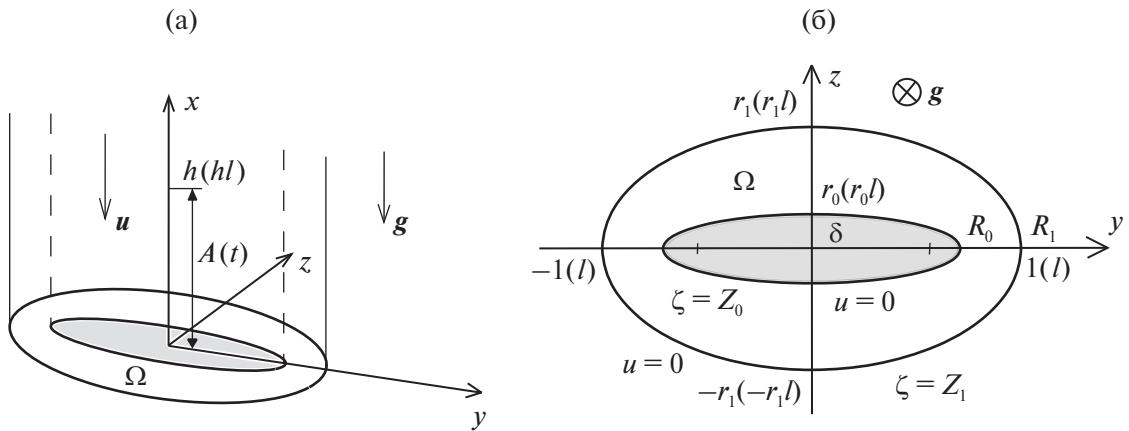
Пусть полимерная жидкость течет в канале, поперечное сечение которого  $\Omega$  в плоскости  $(y, z)$  ограничено двумя софокусными эллипсами. Малые полуоси внешнего и внутреннего эллипсов есть  $r_1 < 1$  и  $r_0 < r_1$ , большая полуось внешнего эллипса равна 1, фокусы эллипсов имеют координаты  $(\pm\delta, 0)$ ,  $\delta < 1$  (речь идет о безразмерных величинах), фиг. 1. В канале вдоль оси  $x$  действует перепад давления  $\Delta P(t)$ . Будем искать *частное решение* исходной системы (1)–(4) следующего вида:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_3 \equiv 0, \quad u_1 = u(t, y, z), \\ P &= \mathcal{P}(t, y, z) - A(t)x, \quad Y = Y(t, y, z), \\ a_{ij} &= a_{ij}(t, y, z), \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

Величина  $A(t) = \frac{\Delta P(t)}{\rho u_H^2 h}$  есть безразмерный перепад давления на отрезке длины  $h$  оси  $x$ . Следуя [12], для такой постановки получаем  $\Phi = u_y a_{12} + u_z a_{13}$ .

Обозначим

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{a_{ij}}{\text{Re}}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad a_i = a_{ii} + \mathfrak{a}^2, \quad \mathfrak{a}^2 = \frac{1}{W\text{Re}}, \\ K_I &= \text{Re} \left( \mathfrak{a}^2 + \frac{\bar{k}}{3} I \right), \quad I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad \tilde{K}_I = K_I + \beta \text{Re} I. \end{aligned}$$



Фиг. 1. Канал с сечением эллиптической формы (а), область сечения между конфокальными эллипсами (б).

Тогда с учетом (5) систему (2), (3) запишем в виде двух систем:

$$\begin{aligned} u_t - (Y\alpha_{12})_y - (Y\alpha_{13})_z &= A(t) + Ga(Y - 1) - Fr^{-2}, \\ (\alpha_{12})_t - \alpha_2 u_y - \alpha_{23} u_z + (\tilde{K}_I \alpha_{12} + \beta \operatorname{Re}(\alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{33})) / \bar{\tau}_0 &= 0, \\ (\alpha_{13})_t - \alpha_{23} u_y - \alpha_3 u_z + (\tilde{K}_I \alpha_{13} + \beta \operatorname{Re}(\alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{13} \alpha_{22})) / \bar{\tau}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_{11})_t - 2(\alpha_{12} u_y + \alpha_{13} u_z) + (K_I \alpha_{11} + \beta \operatorname{Re}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2)) / \bar{\tau}_0 &= 0, \\ (\alpha_{22})_t + (\tilde{K}_I \alpha_{22} + \beta \operatorname{Re}(\alpha_{12}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} \alpha_{33})) / \bar{\tau}_0 &= 0, \\ (\alpha_{33})_t + (\tilde{K}_I \alpha_{33} + \beta \operatorname{Re}(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33} + \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} \alpha_{33})) / \bar{\tau}_0 &= 0, \\ (\alpha_{23})_t + (\tilde{K}_I \alpha_{23} + \beta \operatorname{Re}(\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23})) / \bar{\tau}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения производных давления получим следующие выражения:

$$\mathcal{P}_y = (Y\alpha_{22})_y + (Y\alpha_{23})_z, \quad \mathcal{P}_z = (Y\alpha_{23})_y + (Y\alpha_{33})_z.$$

Для определения температуры имеем уравнение

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + C_d Y (u_y \alpha_{12} + u_z \alpha_{13}) \right). \quad (8)$$

Умножим второе и третье уравнения (6) на  $Y$ , добавим и вычтем из второго уравнения выражение  $Y_t \alpha_{12}$ , а из третьего уравнения  $Y_t \alpha_{13}$ . Выражения, полученные таким образом, продифференцируем по  $y$  и по  $z$ , соответственно, и сложим с производной первого уравнения (6) по  $t$ . В результате придем к квазилинейному уравнению 2-го порядка для функции  $u(t, y, z)$ :

$$u_{tt} - Y \tilde{\Delta} u - \tilde{A} u_y - \tilde{B} u_z + (\tilde{K}_I / \bar{\tau}_0) [u_t - A(t) - Ga(Y - 1) + Fr^{-2}] + F = A'(t) + GaY_t, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} u &= \alpha_2 u_{yy} + 2\alpha_{23} u_{yz} + \alpha_3 u_{zz}, \\ \tilde{A} &= \tilde{A}(t, y, z) = (Y\alpha_2)_y + (Y\alpha_{23})_z, \quad \tilde{B} = \tilde{B}(t, y, z) = (Y\alpha_{23})_y + (Y\alpha_3)_z, \\ F &= F(t, y, z) = Y \left[ \alpha_{12} \left( \frac{\tilde{K}_I}{\bar{\tau}_0} \right)_y + \alpha_{13} \left( \frac{\tilde{K}_I}{\bar{\tau}_0} \right)_z \right] + \beta \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{Yl_{33}}{\bar{\tau}_0} \right)_y + \left( \frac{Yl_{22}}{\bar{\tau}_0} \right)_z \right] - (Y_t \alpha_{12})_y - (Y_t \alpha_{13})_z, \\ l_{22} &= \alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{13} \alpha_{22}, \quad l_{33} = \alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{33}. \end{aligned}$$

**Замечание 1.** При выводе уравнения (9) использовано соотношение

$$(Y\alpha_{12})_y + (Y\alpha_{13})_z = u_t - A(t) - Ga(Y - 1) + Fr^{-2},$$

полученное из первого уравнения системы (6).

Далее исследовано течение полимерной жидкости в канале с сечением  $\Omega$ , лежащим между двумя софокусными эллипсами с фокусным расстоянием  $2\delta$ . Большая полуось внешнего эллипса имеет длину 1, малые полуоси внутреннего и внутреннего эллипсов имеют длины  $r_1 < 1$  и  $r_0 < r_1$  соответственно (см. фиг. 1). Ввиду того, что границы области имеют форму эллипсов, для разработки численного алгоритма имеет смысл перейти к эллиптической системе координат  $(\zeta, \gamma)$ . В ней область решения можно представить в виде прямоугольника  $\Omega = \{(\zeta, \gamma) : Z_0 \leq \zeta \leq Z_1, 0 \leq \gamma < 2\pi\}$ , горизонтальные границы которого  $\zeta = Z_0$  и  $\zeta = Z_1$  являются образами внутренней и внешней стенок канала. Переход из декартовой системы координат  $(y, z)$  в эллиптическую систему  $(\zeta, \gamma)$  задается конформным отображением

$$y = \delta \cosh \zeta \sin \gamma, \quad z = \delta \sinh \zeta \cos \gamma, \quad (10)$$

где  $\delta = \sqrt{1 - r_1^2}$ ,  $0 \leq \zeta < \infty$ ,  $0 \leq \gamma < 2\pi$ . В силу (10) имеем

$$\begin{aligned} y_\zeta &= -z_\gamma = \delta \sinh \zeta \sin \gamma, & z_\zeta &= y_\gamma = \delta \cosh \zeta \cos \gamma, \\ y_{\zeta\zeta} &= -y_{\gamma\gamma} = y, & y_{\zeta\gamma} &= z. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее выразим производные от функции  $u(y, z)$  по переменным  $y, z$  через производные по переменным  $\zeta, \gamma$ :

$$u_y = Ru_\zeta + Qu_\gamma, \quad u_z = Qu_\zeta - Ru_\gamma. \quad (12)$$

Здесь

$$R = \frac{y_\zeta}{y_\zeta^2 + y_\gamma^2} = \frac{\delta \sinh \zeta \sin \gamma}{g^2}, \quad Q = \frac{y_\gamma}{y_\zeta^2 + y_\gamma^2} = \frac{\delta \cosh \zeta \cos \gamma}{g^2}, \quad g^2 = \delta^2(\sinh^2 \zeta + \cos^2 \gamma).$$

Аналогично выражаются производные от функций  $\alpha_{ij}(y, z)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , и  $Y(y, z)$ .

С учетом (12) последовательно находим

$$\begin{aligned} u_{yy} &= R^2 u_{\zeta\zeta} + 2RQu_{\zeta\gamma} + Q^2 u_{\gamma\gamma} + (RR_\zeta + QR_\gamma)u_\zeta + (RQ_\zeta + QQ_\gamma)u_\gamma, \\ u_{zz} &= Q^2 u_{\zeta\zeta} - 2RQu_{\zeta\gamma} + R^2 u_{\gamma\gamma} + (QQ_\zeta - RQ_\gamma)u_\zeta + (RR_\gamma - QR_\zeta)u_\gamma, \end{aligned} \quad (13)$$

при этом

$$R_\zeta = Q_\gamma = \frac{\delta^2 y (\cos^2 \gamma - \sinh^2 \zeta)}{g^4}, \quad R_\gamma = -Q_\zeta = \frac{\delta^2 z (\cosh^2 \zeta + \sin^2 \gamma)}{g^4}.$$

Аналогично находим

$$u_{yz} = RQu_{\zeta\zeta} + (Q^2 - R^2)u_{\zeta\gamma} - RQu_{\gamma\gamma} + (RQ_\zeta + QQ_\gamma)u_\zeta - (RR_\zeta + QR_\gamma)u_\gamma. \quad (14)$$

Выражая в (6)–(9) производные по переменным  $y, z$  через производные по переменным  $\zeta, \gamma$  в соответствии с (12)–(14), получаем разрешающую систему уравнений в эллиптической системе координат, неизвестные функции  $u(\zeta, \gamma)$ ,  $\alpha_{ij}(\zeta, \gamma)$  и  $Y(\zeta, \gamma)$  в этих уравнениях являются достаточно гладкими  $2\pi$ -периодическими по координате  $\gamma$  функциями. Дополним эти уравнения граничными условиями: условиями прилипания жидкости для скорости и значениями температур стенок канала:

$$u(t, Z_1, \gamma) = 0 \text{ при } t > 0, \quad \text{где } Z_1 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + r_1}{1 - r_1} \right), \quad (15)$$

$$u(t, Z_0, \gamma) = 0 \text{ при } t > 0, \quad \text{где } Z_0 = \ln \left( \frac{r_0 + \sqrt{1 + r_0^2 - r_1^2}}{\sqrt{1 - r_1^2}} \right), \quad (16)$$

$$Y(t, Z_0, \gamma) = Y_0(t, \gamma), \quad Y(t, Z_1, \gamma) = Y_1(t, \gamma) \text{ при } t > 0, \quad (17)$$

где  $\zeta = Z_{0,1}$  – уравнения внутренней и внешней границ канала в эллиптической системе координат,  $Y_{0,1}(\gamma)$  – распределения температуры на стенках канала.

Начальные данные сформулируем в предположении, что при  $t = 0$  жидкость в канале поконится, и ее температура находится в равновесии с внешней средой:

$$\alpha_{ij}(0, \zeta, \gamma) = 0, \quad u(0, \zeta, \gamma) = 0, \quad u_t(0, \zeta, \gamma) = 0, \quad Y(0, \zeta, \gamma) = 1 \quad (18)$$

для всех точек  $\zeta, \gamma$  из  $\Omega$ .

Исследуем влияние импульсов градиента давления  $A(t)$  и резких изменений температуры внутренней стенки канала  $Y_0(t, \gamma)$  на картину течения и на реализуемость установившихся режимов течения типа Пуазейля после воздействия таких импульсов.

## 3. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Для реализации расчетов введем сетку по времени с шагом  $\tau$  и узлами  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Обозначим  $u^n = u^n(\zeta, \gamma) = u(t_n, \zeta, \gamma)$ ,  $a_{ij}^n = a_{ij}^n(\zeta, \gamma) = a_{ij}(t_n, \zeta, \gamma)$ ,  $Y^n = Y^n(\zeta, \gamma) = Y(t_n, \zeta, \gamma)$  и аппроксимируем в уравнениях (6)–(9) производные по времени в точке  $t = t_{n+1}$  односторонними разностными производными (производными Гира) вида

$$u_{tt}^{n+1} = u_{tt}|_{t=t_{n+1}} \approx \frac{2u^{n+1} - 5u^n + 4u^{n-1} - u^{n-2}}{\tau^2}, \quad u_t^{n+1} = u_t|_{t=t_{n+1}} \approx \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\tau}, \quad (19)$$

$n = 2, 3, \dots$

## 3.1. Линеаризация уравнений модели

Для реализации вычислений после перехода в эллиптическую систему координат в уравнениях (6)–(9) необходимо выполнить линеаризацию и на каждом шаге по времени осуществлять итерации по нелинейности (их описание приведено ниже). Запишем линеаризованные по Ньютону уравнения для функций  $a_{ij}$  в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_{11})_t^{n+1} &= -\frac{\text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \alpha_{11}^n + \frac{\bar{k}}{3} I^n + \alpha^2 \right] \alpha_{11}^{n+1} + \frac{\text{Re} \bar{k}}{3\bar{\tau}_0^n} (\alpha_{11}^n)^2 + \\ &\quad + 2(\alpha_{12}^n R + \alpha_{13}^n Q) u_\zeta^n + 2(\alpha_{12}^n Q - \alpha_{13}^n R) u_\gamma^n - \frac{\beta \text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} [(\alpha_{12}^n)^2 + (\alpha_{13}^n)^2 - (\alpha_{11}^n)^2], \\ (\alpha_{22})_t^{n+1} &= -\frac{1}{\bar{\tau}_0^n} \left[ K_I^n + \text{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \alpha_{22}^n \right] \alpha_{22}^{n+1} + \frac{\text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} \left( \frac{\bar{k}}{3} (\alpha_{22}^n)^2 + \beta [(\alpha_{22}^n)^2 - (\alpha_{12}^n)^2 - (\alpha_{23}^n)^2] \right), \\ (\alpha_{33})_t^{n+1} &= -\frac{1}{\bar{\tau}_0^n} \left[ K_I^n + \text{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \alpha_{33}^n \right] \alpha_{33}^{n+1} + \frac{\text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} \left( \frac{\bar{k}}{3} (\alpha_{33}^n)^2 + \beta [(\alpha_{33}^n)^2 - (\alpha_{13}^n)^2 - (\alpha_{23}^n)^2] \right), \\ (\alpha_{12})_t^{n+1} &= \frac{\beta \text{Re} \alpha_{33}^n - \tilde{K}_I^n}{\bar{\tau}_0^n} \alpha_{12}^{n+1} + (\alpha_{12}^n R + \alpha_{23}^n Q) u_\zeta^n + (\alpha_{12}^n Q - \alpha_{23}^n R) u_\gamma^n - \frac{\beta \text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} \alpha_{13}^n \alpha_{23}^n, \\ (\alpha_{13})_t^{n+1} &= \frac{\beta \text{Re} \alpha_{22}^n - \tilde{K}_I^n}{\bar{\tau}_0^n} \alpha_{13}^{n+1} + (\alpha_{23}^n R + \alpha_3^n Q) u_\zeta^n + (\alpha_{23}^n Q - \alpha_3^n R) u_\gamma^n - \frac{\beta \text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} \alpha_{12}^n \alpha_{23}^n, \\ (\alpha_{23})_t^{n+1} &= \frac{\beta \text{Re} \alpha_{11}^n - \tilde{K}_I^n}{\bar{\tau}_0^n} \alpha_{23}^{n+1} - \frac{\beta \text{Re}}{\bar{\tau}_0^n} \alpha_{12}^n \alpha_{13}^n, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$I^n = a_{11}^n + a_{22}^n + a_{33}^n, \quad K_I^n = \text{Re} \left( \alpha^2 + \frac{\bar{k}}{3} I^n \right), \quad \tilde{K}_I^n = K_I^n + \beta \text{Re} I^n, \quad \alpha_i^n = \alpha_{ii}^n + \alpha^2, \quad i = 2, 3, \quad \bar{\tau}_0^n = J(Y^n)/Y^n, \quad u_\zeta^n, \quad u_\gamma^n$$

есть производные функции  $u(t, \zeta, \gamma)$  при  $t = t_n$ .

Для поиска функции  $u^{n+1}(\zeta, \gamma)$  после перехода в (9) в эллиптическую систему координат запишем линеаризованное уравнение вида

$$\frac{2}{\tau^2} u^{n+1} - c\alpha^2 (u_{\zeta\zeta}^{n+1} + u_{\gamma\gamma}^{n+1}) = F_u^n + \frac{\tilde{K}_I^n}{\bar{\tau}_0^n} \left( \frac{4u^{n-1} - u^{n-2}}{2\tau} \right) + \frac{5u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}}{\tau^2}, \quad (21)$$

где

$$F_u^n = Y^n [C_1 u_{\zeta\zeta}^n + 2C_2 u_{\zeta\gamma}^n + C_3 u_{\gamma\gamma}^n + C_4 u_\zeta^n + C_5 u_\gamma^n] + C_6 Y_\zeta^n u_\zeta^n + C_7 Y_\gamma^n u_\gamma^n + C_2 (Y_\zeta^n u_\gamma^n + Y_\gamma^n u_\zeta^n) +$$

$$+ \frac{\tilde{K}_I^n}{\bar{\tau}_0^n} [A(t_n) + \text{Ga}(Y^n - 1) - \text{Fr}^{-2} - 3u^n/(2\tau)] - F^n + A'(t_n) + \text{Ga} Y_t^n,$$

$$C_1 = R^2 \alpha_{22}^n + Q^2 \alpha_{33}^n + 2RQ \alpha_{23}^n + (\alpha/g)^2 - c\alpha^2/Y^n,$$

$$C_2 = RQ(\alpha_{22}^n - \alpha_{33}^n) + (Q^2 - R^2) \alpha_{23}^n,$$

$$C_3 = Q^2 \alpha_{22}^n + R^2 \alpha_{33}^n - 2RQ \alpha_{23}^n + (\alpha/g)^2 - c\alpha^2/Y^n,$$

$$C_4 = (RR_\zeta + QR_\gamma) \alpha_2^n + (QQ_\zeta - RQ_\gamma) \alpha_3^n + 2(RQ_\zeta + QQ_\gamma) \alpha_{23}^n + R\Psi(\alpha_2^n, \alpha_{23}^n) + Q\Psi(\alpha_{23}^n, \alpha_3^n),$$

$$C_5 = (RQ_\zeta + QQ_\gamma) \alpha_2^n + (RR_\gamma - QR_\zeta) \alpha_3^n - 2(RR_\zeta + QR_\gamma) \alpha_{23}^n + Q\Psi(\alpha_2^n, \alpha_{23}^n) - R\Psi(\alpha_{23}^n, \alpha_3^n),$$

$$\begin{aligned}
\Psi(a, b) &= Ra_\zeta + Qa_\gamma + Qb_\zeta - Rb_\gamma, \\
C_6 &= R^2 a_2^n + 2RQa_{23}^n + Q^2 a_3^n, \\
C_7 &= Q^2 a_2^n - 2RQa_{23}^n + R^2 a_3^n, \\
F^n &= Y^n \left[ (Ra_{12}^n + Qa_{13}^n) \left( \frac{\tilde{K}_I^n}{\tilde{\tau}_0^n} \right)_\zeta + (Qa_{12}^n - Ra_{13}^n) \left( \frac{\tilde{K}_I^n}{\tilde{\tau}_0^n} \right)_\gamma \right] + R\varphi_\zeta + Q\varphi_\gamma - R\Psi_\gamma + Q\Psi_\zeta, \\
\varphi &= \varphi(\zeta, \gamma) = \frac{Y^n l_{33}^n}{\tilde{\tau}_0^n} - Y_t^n a_{12}^n, \quad \psi = \psi(\zeta, \gamma) = \frac{Y^n l_{22}^n}{\tilde{\tau}_0^n} - Y_t^n a_{13}^n,
\end{aligned}$$

$(l_{22}^n)_{\zeta, \gamma} = (a_{12}^n a_{23}^n - a_{13}^n a_{22}^n)_{\zeta, \gamma}$ ,  $(l_{33}^n)_{\zeta, \gamma} = (a_{13}^n a_{23}^n - a_{12}^n a_{33}^n)_{\zeta, \gamma}$  – производные от функций  $l_{22}^n, l_{33}^n$ ;  $A'(t_n) = \frac{dA(t)}{dt} \Big|_{t=t_n}, c > 0$  – некоторая постоянная. Выбор достаточно больших величин  $c$  обеспечивает сходимость предложенного метода. При записи (21) в предположении, что шаг  $\tau$  достаточно мал, использованы приближенные соотношения, полученные при исключении членов высокого порядка малости по отношению к  $\tau$ :

$$u_{yy} + u_{zz} \Big|_{t=t_n} = \frac{1}{g^2} (u_{\zeta\zeta} + u_{\gamma\gamma}) \Big|_{t=t_n} \approx c(u_{\zeta\zeta}^{n+1} + u_{\gamma\gamma}^{n+1}) + \left( \frac{1}{g^2} - c \right) (u_{\zeta\zeta}^n + u_{\gamma\gamma}^n).$$

Линеаризованное уравнение для безразмерной температуры имеет вид

$$\text{Pr}Y_t^{n+1} - c(Y_{\zeta\zeta}^{n+1} + Y_{\gamma\gamma}^{n+1}) = F_Y^n, \quad (22)$$

$$F_Y^n = [1/g^2 - c](Y_{\zeta\zeta}^n + Y_{\gamma\gamma}^n) + C_d Y^n [(Ra_{12}^n + Qa_{13}^n)u_\zeta^n + (Qa_{12}^n - Ra_{13}^n)u_\gamma^n].$$

**Замечание 2.** Разложение выражений, содержащих вторые производные функций  $u$  и  $Y$ , на слагаемые, включающие решения с  $(n+1)$ -й и  $n$ -й итераций, выполненное при записи (21), (22), связано с тем, что далее для поиска численного решения на каждом шаге по времени планируется реализовать итерационную схему по нелинейности в комбинации с быстрым алгоритмом из [24, 25], основанным на прямых произведениях одномерных интерполяций и решении матричных уравнений Сильвестра. Для применения этого алгоритма требуется, чтобы коэффициенты, стоящие при производных неизвестных функций в левых частях, были постоянными.

### 3.2. Аппроксимация неизвестных функций и их производных

На каждом шаге описанной схемы по времени будем искать решения уравнений (20)–(22) с граничными условиями и начальными данными (15)–(18) в классе достаточно гладких в области  $\Omega$   $2\pi$ -периодических по переменной  $\gamma$  функций. Далее для записи вычислительной схемы необходимо аппроксимировать в уравнениях (20)–(22) функции  $a_{ij}^n(\zeta, \gamma)$ ,  $u^n(\zeta, \gamma)$  и  $Y^n(\zeta, \gamma)$  и их производные по переменным  $\zeta$  и  $\gamma$ . В качестве способа аппроксимации по переменной  $\zeta$  используем барицентрические дробно-рациональные интерполяции [15, 16, 26], а по переменной  $\gamma$  – тригонометрические полиномы с ядром Дирихле. Для приближения функций  $a_{ij}^n(\zeta, \gamma)$ ,  $u^n(\zeta, \gamma)$  и  $Y^n(\zeta, \gamma)$  применим прямые (тензорные) произведения указанных одномерных интерполяций.

В области  $\Omega = \{(\zeta, \gamma) : Z_0 \leq \zeta \leq Z_1, 0 \leq \gamma < 2\pi\}$  введем сетку с узлами  $(\zeta_k, \gamma_m)$ , где  $\zeta_k = \mathcal{L} \circ g(\xi_k)$ ,  $\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2K}$  – нули полинома Чебышёва степени  $K$ ,  $\hat{\zeta} = g(\xi)$  – конформное отображение, переводящее отрезок  $[-1, 1]$  в себя,  $\mathcal{L}(\hat{\zeta}) = [(Z_1 - Z_0)\hat{\zeta} + Z_1 + Z_0]/2$  – линейное отображение отрезка  $[-1, 1]$  в  $[Z_0, Z_1]$ ;  $\gamma_m = \frac{2\pi(m-1)}{2M-1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $M = 2M-1$ . Пусть  $\hat{\zeta}_k = g(\xi_k)$ , тогда  $\zeta_k = \mathcal{L}(\hat{\zeta}_k)$ . Будем полагать (см. введение), что аналитические продолжения неизвестных функций по переменной  $\zeta$  имеют особые точки, лежащие на действительной прямой вне отрезка  $[Z_0, Z_1]$  близко к его границам. Тогда, следуя оценкам погрешности из [15], отображение  $g(\xi)$  следует выбирать таким образом, чтобы обратное отображение  $g^{-1}(\hat{\zeta})$  переносило эти особые точки на достаточно большое расстояние от отрезка  $[-1, 1]$ . В качестве такого отображения в этой работе используем функцию с параметром  $b$ , предложенную в [27, 28]:

$$g(\xi) = \arctan(b\xi)/\arctan(b), \quad b > 0. \quad (23)$$

Несложно проверить, что если образы особых точек  $a_{ij}^n$ ,  $u^n$ ,  $Y^n$  как функций переменной  $\zeta$  под действием отображения  $\mathcal{L}^{-1}$  лежат на отрезке  $[-1 + \tilde{\varepsilon}, 1 + \tilde{\varepsilon}]$ , то, задав  $b = \tan \frac{\pi}{2(1 + \tilde{\varepsilon})}$ , получим отображение с требуемыми свойствами.

Пусть  $(\alpha_{ij}^n)_{km} = \alpha_{ij}^n(\zeta_k, \gamma_m)$ ,  $u_{km}^n = u^n(\zeta_k, \gamma_m)$ ,  $Y_{km}^n = Y^n(\zeta_k, \gamma_m)$ . Построим приближения

$$\alpha_{ij}^n(\zeta, \gamma) \approx P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M l_{kK}(\hat{\zeta}) D_{mM}(\gamma) (\alpha_{ij}^n)_{km}, \quad (24)$$

$$u^n(\zeta, \gamma) \approx P_b(u^n, \zeta, \gamma) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M l_{kK}^b(\hat{\zeta}) D_{mM}(\gamma) u_{km}^n, \quad Y^n(\zeta, \gamma) \approx P_b(Y^n, \zeta, \gamma) + V^n(\zeta, \gamma), \quad (25)$$

где

$$l_{kK}(\hat{\zeta}) = J_k(\hat{\zeta}) / \mathfrak{D}_K(\hat{\zeta}), \quad J_k(\hat{\zeta}) = \frac{\omega_k}{\hat{\zeta} - \hat{\zeta}_k}, \quad \mathfrak{D}_K(\hat{\zeta}) = \sum_{k=1}^K J_k(\hat{\zeta}),$$

$\omega_k = (-1)^{k-1} \sin \frac{2k-1}{2K} \pi$  – веса барицентрической интерполяции с узлами  $\hat{\zeta}_k$ , см. [29];

$$D_{mM}(\gamma) = \frac{2}{2M-1} \frac{\sin[(M-0.5)(\gamma - \gamma_m)]}{2 \sin((\gamma - \gamma_m)/2)}, \quad l_{kK}^b(\hat{\zeta}) = \frac{1 - \hat{\zeta}^2}{1 - \hat{\zeta}_k^2} l_{kK}(\hat{\zeta}), \quad k = 1, \dots, K.$$

Функции  $l_{kK}$ ,  $l_{kK}^b$ ,  $D_{mM}$  удовлетворяют свойствам фундаментальных многочленов интерполяции ( $l_{kK}(\hat{\zeta}_l) = \delta_{kl}$ ,  $l_{kK}^b(\hat{\zeta}_l) = \delta_{kl}$ ,  $D_{mM}(\gamma_q) = \delta_{mq}$ , где  $\delta_{mq}$  – символ Кронекера), при этом  $l_{kK}$ ,  $l_{kK}^b$  являются дробно-рациональными функциями,  $D_{mM}$  – тригонометрическим многочленом;  $D_{mM}(\gamma) = \frac{2}{2M-1} D_M(\gamma - \gamma_m)$ ,  $D_M$  – ядро Дирихле; появление в приближениях (25) функции  $l_{kK}^b(\hat{\zeta})$  вместо функции  $l_{kK}(\hat{\zeta})$  обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий (15), (16), см. также [30], гл. 9, § 5. Для выполнения условий (17) в приближении функции  $Y^n(\zeta, \gamma)$  присутствует линейная по  $\zeta$  функция  $V^n(\zeta, \gamma) = [(Y_1(t_n, \gamma) - Y_0(t_n, \gamma))\zeta + Y_0(t_n, \gamma)Z_1 - Y_1(t_n, \gamma)Z_0]/(Z_1 - Z_0)$ , удовлетворяющая условиям:  $V^n(Z_0, \gamma) = Y_0(t_n, \gamma)$ ,  $V^n(Z_1, \gamma) = Y_1(t_n, \gamma)$ . Далее будем полагать  $Y_0$  и  $Y_1$  независящими от  $\gamma$  и для краткости опустим слагаемое « $V^n(\zeta, \gamma)$ » в формуле (25).

Для аппроксимации уравнений (20)–(22) далее будет использован метод коллокаций с узлами  $(\zeta_k, \gamma_m)$ , поэтому нам потребуются значения производных дробно-рациональных интерполяций (24), (25) в этих узлах. Дифференцируя функцию  $P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma)$  по  $\zeta$ , переходя к пределу при  $\zeta \rightarrow \zeta_l$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma_q$ ,  $l = \overline{1, K}$ ,  $q = \overline{1, M}$ , используя свойство фундаментальных многочленов:  $l_{kK}(\hat{\zeta}_l) = \delta_{kl}$ ,  $D_{mM}(\gamma_q) = \delta_{mq}$  и правило Лопиталя, находим

$$\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial \zeta}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \lim_{(\zeta, \gamma) \rightarrow (\zeta_l, \gamma_q)} \frac{\partial P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma)}{\partial \zeta} = \sum_{k=1, k \neq l}^K \xi_{lk} (\alpha_{ij})_{kq}^n + v_l (\alpha_{ij})_{lq}^n,$$

где

$$\xi_{lk} = \frac{\omega_k}{\omega_l(\hat{\zeta}_l - \hat{\zeta}_k)}, \quad v_l = - \sum_{s=1, s \neq l}^K \xi_{ls}, \quad l, k = \overline{1, K}, \quad l \neq k.$$

Дифференцируя функцию  $P_b(u^n, \zeta, \gamma)$  по  $\zeta$  один и два раза, получаем

$$\frac{\partial u^n}{\partial \zeta}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{k=1, k \neq l}^K \eta_{lk} u_{kq}^n + \mu_l u_{lq}^n, \quad \frac{\partial^2 u^n}{\partial \zeta^2}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{k=1, k \neq l}^K \chi_{lk} u_{kq}^n + \kappa_l u_{lq}^n,$$

где

$$\eta_{lk} = \frac{1 - \hat{\zeta}_l^2}{1 - \hat{\zeta}_k^2} \xi_{lk}, \quad \mu_l = - \frac{2 \hat{\zeta}_l}{1 - \hat{\zeta}_l^2} - \sum_{s=1, s \neq l}^K \xi_{ls};$$

$$\chi_{lk} = \frac{-2 \xi_{lk}}{1 - \hat{\zeta}_k^2} (2 \hat{\zeta}_l + (1 - \hat{\zeta}_l^2) \tilde{\gamma}_{lk}), \quad \kappa_l = - \frac{2}{1 - \hat{\zeta}_l^2} + \frac{4 \hat{\zeta}_l}{1 - \hat{\zeta}_l^2} \sum_{s=1, s \neq l}^K \xi_{ls} (1 + 2 \tilde{\gamma}_{ls}), \quad \tilde{\gamma}_{ls} = \sum_{r=1, r \neq l}^K \xi_{lr} + \frac{1}{\hat{\zeta}_l - \hat{\zeta}_s}.$$

Дифференцируя функции  $P(\alpha_{ij}^n, \zeta, \gamma)$  и  $P_b(u^n, \zeta, \gamma)$  по  $\gamma$ , находим

$$\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial \gamma}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{m=1, m \neq q}^M \tilde{\xi}_{qm} (\alpha_{ij})_{lm}^n + \tilde{v}_q (\alpha_{ij})_{lq}^n,$$

$$\frac{\partial u^n}{\partial \gamma}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{m=1, m \neq q}^M \tilde{\xi}_{qm} u_{lm}^n + \tilde{v}_q u_{lq}^n, \quad \frac{\partial^2 u^n}{\partial \gamma^2}(\zeta_l, \gamma_q) \approx \sum_{m=1, m \neq q}^M \tilde{\chi}_{qm} u_{lm}^n + \tilde{\kappa}_q u_{lq}^n,$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{qm} &= \frac{(-1)^{q-m}}{2} \left( \sin \frac{\pi(q-m)}{M} \right)^{-1}, \quad \tilde{v}_q = 0, \quad m, q = \overline{1, M}, \quad q \neq m; \\ \tilde{\chi}_{qm} &= \frac{(-1)^{q-m+1}}{2} \cos \frac{\pi(q-m)}{M} \left( \sin \frac{\pi(q-m)}{M} \right)^{-2}, \quad \tilde{\kappa}_q \equiv -\frac{M(M-1)}{3}.\end{aligned}$$

Пусть

$\Lambda_{ij}^n, (\Lambda_{ij}^n)_\zeta$  — матрицы размера  $K \times M$  с элементами  $\alpha_{ij}^n(\zeta_k, \gamma_m)$  и  $\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial \zeta}(\zeta_k, \gamma_m)$ ;

$U^n, U_\zeta^n, U_{\zeta\zeta}^n$  — матрицы размера  $K \times M$  с элементами  $u^n(\zeta_k, \gamma_m)$ ,  $\frac{\partial u^n}{\partial \zeta}(\zeta_k, \gamma_m)$ ,  $\frac{\partial^2 u^n}{\partial \zeta^2}(\zeta_k, \gamma_m)$ ;

$\Upsilon^n, \Upsilon_\zeta^n, \Upsilon_{\zeta\zeta}^n$  — матрицы размера  $K \times M$  с элементами  $Y^n(\zeta_k, \gamma_m)$ ,  $\frac{\partial Y^n}{\partial \zeta}(\zeta_k, \gamma_m)$ ,  $\frac{\partial^2 Y^n}{\partial \zeta^2}(\zeta_k, \gamma_m)$ .

Сформируем матрицы размера  $K \times K$

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_1 & \tilde{\xi}_{12} & \dots & \tilde{\xi}_{1K} \\ \tilde{\xi}_{21} & v_2 & \dots & \tilde{\xi}_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\xi}_{K1} & \tilde{\xi}_{K2} & \dots & v_K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \eta_{12} & \dots & \eta_{1K} \\ \eta_{21} & \mu_2 & \dots & \eta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \eta_{K1} & \eta_{K2} & \dots & \mu_K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \chi_{12} & \dots & \chi_{1K} \\ \chi_{21} & \kappa_2 & \dots & \chi_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \chi_{K1} & \chi_{K2} & \dots & \kappa_K \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации производных по  $\zeta$  в уравнениях (20)–(22) имеем формулы

$$(\Lambda_{ij}^n)_\zeta \approx A_1 \Lambda_{ij}^n, \quad U_\zeta^n \approx \mathcal{A}_1 U^n, \quad U_{\zeta\zeta}^n \approx \mathcal{A}_2 U^n. \quad (26)$$

Сформируем матрицы размера  $M \times M$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{\xi}_{12} & \dots & \tilde{\xi}_{1M} \\ \tilde{\xi}_{21} & \tilde{v}_2 & \dots & \tilde{\xi}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\xi}_{M1} & \tilde{\xi}_{M2} & \dots & \tilde{v}_M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\chi}_{12} & \dots & \tilde{\chi}_{1M} \\ \tilde{\chi}_{21} & \tilde{\kappa}_2 & \dots & \tilde{\chi}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\chi}_{M1} & \tilde{\chi}_{M2} & \dots & \tilde{\kappa}_M \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации производных по  $\gamma$  в уравнениях (20)–(22) имеем формулы

$$(\Lambda_{ij}^n)_\gamma \approx \Lambda_{ij}^n B_1^T, \quad U_\gamma^n \approx U^n B_1^T, \quad U_{\gamma\gamma}^n \approx U^n \mathcal{B}_2^T, \quad (\Lambda_{ij}^n)_{\zeta\gamma} \approx A_1 \Lambda_{ij}^n B_1^T, \quad U_{\zeta\gamma}^n \approx \mathcal{A}_1 U^n B_1^T. \quad (27)$$

Здесь матрицы размера  $K \times M$   $(\Lambda_{ij}^n)_\gamma$ ,  $U_\gamma^n$ ,  $U_{\gamma\gamma}^n$ ,  $(\Lambda_{ij}^n)_{\zeta\gamma}$ ,  $U_{\zeta\gamma}^n$  определяются по аналогии с определением матриц  $(\Lambda_{ij}^n)_\zeta$ ,  $U_\zeta^n$ . Приближения производных функции  $Y^n(\zeta, \gamma)$ , включающие выражения для матриц  $\Upsilon^n$ ,  $\Upsilon_\zeta^n$ ,  $\Upsilon_{\zeta\zeta}^n$ ,  $\Upsilon_\gamma^n$ ,  $\Upsilon_{\gamma\gamma}^n$  и  $\Upsilon_{\zeta\gamma}^n$ , строятся полностью аналогично приближениям производных функции  $u^n(\zeta, \gamma)$ .

Далее для построения алгоритмов воспользуемся спектральным разложением матриц  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$ , аппроксимирующих вторые производные:

$$\mathcal{A}_2 = R_{\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{-1}, \quad \mathcal{B}_2 = R_{\mathcal{B}} D_{\mathcal{B}} R_{\mathcal{B}}^{-1}, \quad (28)$$

где  $R_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{B}}$  — матрицы собственных векторов  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{B}_2$ ;  $D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}$  — диагональные матрицы собственных значений  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{B}_2$  —  $d_{\mathcal{A}}^k, d_{\mathcal{B}}^m$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

**Замечание 3.** Используя выражения для величин  $\tilde{\chi}_{qm}$ , нетрудно видеть, что матрица  $\mathcal{B}_2$  является симметричной, следовательно матрица  $R_{\mathcal{B}}$  является ортогональной  $R_{\mathcal{B}}^{-1} = R_{\mathcal{B}}^T$ . Строго говоря, при наличии у матрицы  $\mathcal{A}_2$  комплексно-сопряженных собственных чисел, матрица  $D_{\mathcal{A}}$  является блочно-диагональной, содержащей на диагонали блоки размера  $2 \times 2$ . Однако, как показали численные эксперименты, выбранный базис исключает такую возможность. Важным обстоятельством является также медленный рост числа обусловленности матрицы  $R_{\mathcal{A}}$  с ростом  $K$ , обеспечивающий устойчивость алгоритма к погрешностям округления (см. [24]).

**Замечание 4.** Подчеркнем, что описанное выше приближение (24) функций  $\alpha_{ij}^n(\zeta, \gamma)$  отличается от приближений (25) функций  $u^n(\zeta, \gamma)$  и  $Y^n(\zeta, \gamma)$  тем, что последние по построению удовлетворяют заданным граничным условиям. Это обстоятельство приводит к тому, что матрица  $A_1$ , аппроксимирующая оператор дифференцирования по переменной  $\zeta$  для функций  $\alpha_{ij}^n$ , отличается от соответствующей матрицы  $\mathcal{A}_1$  для функций  $u^n$  и  $Y^n$ .

### 3.3. Решение задачи линейной алгебры

Для поиска численных решений уравнений (20)–(22) воспользуемся приближениями, описанными в разд. 3.2 и методом коллокаций с узлами  $(\zeta_k, \gamma_m)$  в области  $\Omega$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $m = \overline{1, M}$ . В результате получатся линейные матричные уравнения для выражения матриц  $\Lambda_{ij}^{n+1}$ ,  $U^{n+1}$ ,  $\Upsilon^{n+1}$  через матрицы  $\Lambda_{ij}^v$ ,  $U^v$ ,  $\Upsilon^v$ ,  $v = n, n-1, n-2$ . Однако в силу нелинейности и связности уравнений исходной дифференциальной задачи решение этих матричных уравнений итерациями по времени приводит к достаточно быстрому росту погрешности и расходимости алгоритма. Эта проблема становится особенно критичной при моделировании импульсных воздействий на жидкость с резким изменением градиента давления в канале и температуры нагревательного элемента. Решением такой проблемы является применение на каждом временном шаге итераций по нелинейности. При этом момент времени  $t = t_{n+1}$  и значения решения в предыдущие моменты времени  $t = t_n, t_{n-1}, \dots$  фиксируются, а решения в текущий момент времени насчитываются во вложенном цикле. Пусть  $s$  – номер шага этого цикла. Для решений на шаге  $s$  введем обозначения  $\widehat{\Lambda}_{ij}^s = \Lambda_{ij}^{n+1,s}$ ,  $\widehat{U}^s = U^{n+1,s}$ ,  $\widehat{\Upsilon}^s = \Upsilon^{n+1,s}$ . Решения  $\widehat{\Lambda}_{ij}^s$ ,  $\widehat{U}^s$ ,  $\widehat{\Upsilon}^s$  выражаются через  $\widehat{\Lambda}_{ij}^{s-1}$ ,  $\widehat{U}^{s-1}$ ,  $\widehat{\Upsilon}^{s-1}$  в соответствии с формулами (30)–(32) и начальными условиями  $\Lambda_{ij}^{n+1,0} = \Lambda_{ij}^n$ ,  $U^{n+1,0} = U^n$ ,  $\Upsilon^{n+1,0} = \Upsilon^n$ . Итерации по нелинейности останавливаются при выполнении условий

$$\frac{\|\widehat{\Lambda}_{ij}^s - \widehat{\Lambda}_{ij}^{s-1}\|}{\|\widehat{\Lambda}_{ij}^s\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad \frac{\|\widehat{U}^s - \widehat{U}^{s-1}\|}{\|\widehat{U}^s\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad \frac{\|\widehat{\Upsilon}^s - \widehat{\Upsilon}^{s-1}\|}{\|\widehat{\Upsilon}^s\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (29)$$

либо по прошествии  $N_{it}^{\max}$  итераций, где значения  $N_{it}^{\max}$  приведены в табл. 1. В случае остановки номер  $s$  обозначим  $\sigma$  и положим  $\Lambda_{ij}^{n+2} = \widehat{\Lambda}_{ij}^\sigma$ ,  $U^{n+2} = \widehat{U}^\sigma$ ,  $\Upsilon^{n+2} = \widehat{\Upsilon}^\sigma$ . Здесь и далее норма обозначает максимальный элемент матрицы. В наших расчетах задано  $\varepsilon_{NI} = 10^{-8}$ . При переходе на следующий шаг по времени меняются значения функций  $A(t_{n+1})$ ,  $A'(t_{n+1})$ , стоящих в правой части (21) и описывающих зависимость градиента давления в канале от времени, либо изменяются значения функции  $Y_0(t_{n+1}, \gamma)$  в граничных условиях (17).

Запишем для примера уравнение итерационного метода для выражения  $\widehat{\Lambda}_{11}^{s+1}$  (см. первое уравнение в системе (20)):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{11} \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^{s+1} &= \left\{ \frac{3}{2\tau} + \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \widehat{\Lambda}_{11}^s + \frac{\bar{k}}{3} (\widehat{\Lambda}_{11}^s + \widehat{\Lambda}_{22}^s + \widehat{\Lambda}_3^s) + \alpha^2 E_I \right] / \bar{\mathfrak{T}}_0 \right\} \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^{s+1} = \\ &= \frac{4\Lambda_{11}^n - \Lambda_{11}^{n-1}}{2\tau} + 2(\widehat{\Lambda}_{12}^s \cdot \mathcal{R} + \widehat{\Lambda}_{13}^s \cdot \mathcal{Q}) \cdot (\mathcal{A}_1 \widehat{U}^s) + 2(\widehat{\Lambda}_{12}^s \cdot \mathcal{Q} - \widehat{\Lambda}_{13}^s \cdot \mathcal{R}) \cdot (\widehat{U}^s B_1^T) + \\ &\quad + \frac{\operatorname{Re} \bar{k}}{3} (\widehat{\Lambda}_{11}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^s) / \bar{\mathfrak{T}}_0 - \beta \operatorname{Re} (\widehat{\Lambda}_{12}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{12}^s + \widehat{\Lambda}_{13}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{13}^s - \widehat{\Lambda}_{11}^s \cdot \widehat{\Lambda}_{11}^s) / \bar{\mathfrak{T}}_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь точка (знак умножения) и косая черта означают поэлементное произведение и деление матриц,  $E_I$  – матрица размера  $K \times M$ , все элементы которой равны единице,  $\mathcal{R}, \mathcal{Q}$  – матрицы размера  $K \times M$ , содержащие значения функций  $R(\zeta, \gamma)$ ,  $Q(\zeta, \gamma)$  в узлах  $\zeta_k, \gamma_m$  соответственно,  $\bar{\mathfrak{T}}_0^s$  – матрица размера  $K \times M$  со значениями функции  $J(Y(t_{n+1}, \zeta, \gamma)) / Y(t_{n+1}, \zeta, \gamma)$ , насчитанными на шаге  $s$  в тех же узлах. Апроксимации остальных пяти уравнений из системы (20) записываются аналогично.

Апроксимации уравнений (21), (22) выглядят следующим образом:

$$\frac{2}{\tau^2} \widehat{U}^{s+1} - \alpha^2 c (\mathcal{A}_2 \widehat{U}^{s+1} + \widehat{U}^{s+1} \mathcal{B}_2^T) = \widehat{\mathcal{F}}_U^s + \frac{\widehat{\mathcal{K}}_I^s}{\bar{\mathfrak{T}}_0^s} \left( \frac{4U^n - U^{n-1}}{2\tau} \right) + \frac{5U^n - 4U^{n-1} + U^{n-2}}{\tau^2}, \quad (31)$$

Таблица 1. Параметры численного метода

Параметр	Описание	Интервал значений
$K, M$	Число узлов сетки вдоль осей $\zeta$ и $\gamma$	15–41
$\tau$	Шаг сетки по времени	$10^{-4}$ –0.05
$\varepsilon_s$	Погрешность стабилизации течения, см. (37)	$10^{-3}$
$\varepsilon_{NI}$	Погрешность итераций по нелинейности	$10^{-8}$
$N_{it}^{\max}$	Максимальное количество итераций по нелинейности	$10^3$ – $10^4$
$c$	Параметр линеаризации уравнений (21), (22)	80–120
$b$	Параметр сгущения для адаптации сетки (23)	1.6

$$\frac{3\Pr}{2\tau} \widehat{\Upsilon}^{s+1} - c(\mathcal{A}_2 \widehat{\Upsilon}^{s+1} + \widehat{\Upsilon}^{s+1} \mathcal{B}_2^T) = \widehat{\mathcal{F}}_Y^s + \Pr \frac{4\Upsilon^n - \Upsilon^{n-1}}{2\tau}, \quad (32)$$

где  $\widehat{\mathcal{K}}_I^s$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}_U^s$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}_Y^s$  – матрицы значений функции  $\widehat{K}_I^{n+1}$  и функций  $F_u^{n+1}$ ,  $F_Y^{n+1}$ , стоящих в правых частях уравнений (21), (22), начтанные на итерации по нелинейности с номером  $s$  в момент времени  $t = t_{n+1}$ . Отметим, что для расчета производных, стоящих в правых частях, применяются формулы вида (26), (27), а для выполнения любых других действий реализуются соответствующие поэлементные операции с матрицами.

Для решения матричного уравнения (30) на каждом шаге  $s$  необходимо выполнять деления элементов матрицы в правой части на элементы матрицы  $\mathfrak{M}_{11}$ . Аналогичные действия выполняются для поиска приближенных значений всех функций  $\alpha_{ij}^{n+1}$  на шаге  $s+1$  в узлах коллокации.

Для решения (31) используем спектральные разложения (28) матриц  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$ , стоящих в левой части (31). Умножим (31) на матрицу  $R_{\mathcal{A}}^{-1}$  слева и на матрицу  $R_{\mathcal{B}}^{-1}$  справа, обозначим  $p_{\tau} = 2/\tau^2$ ,  $\widehat{V}^{s+1} = R_{\mathcal{A}}^{-1} \widehat{U}^{s+1} R_{\mathcal{B}}^{-1}$ ,

$$\widehat{\mathcal{G}}^s = R_{\mathcal{A}}^{-1} \left[ \widehat{\mathcal{F}}_U^s + \frac{\widehat{\mathcal{K}}_I^s}{\mathfrak{T}_0^s} \left( \frac{4U^n - U^{n-1}}{2\tau} \right) + \frac{5U^n - 4U^{n-1} + U^{n-2}}{\tau^2} \right] R_{\mathcal{B}}^{-1}$$

и получим матричное уравнение

$$p_{\tau} \widehat{V}^{s+1} - c\widehat{\mathcal{G}}^s (D_{\mathcal{A}} \widehat{V}^{s+1} + \widehat{V}^{s+1} D_{\mathcal{B}}) = \widehat{\mathcal{G}}^s,$$

решение которого относительно элементов  $v_{km}^{s+1}$  матрицы  $\widehat{V}^{s+1}$  дается формулами

$$v_{km}^{s+1} = \frac{g_{km}^s}{p_{\tau} - c\widehat{\mathcal{G}}^s (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{1, M},$$

где  $g_{km}^s$  – элементы матрицы  $\widehat{\mathcal{G}}^s$ . Шаг сетки по времени  $\tau$  нужно выбирать, исходя из условия  $p_{\tau} \neq c\widehat{\mathcal{G}}^s (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)$ , т. е.  $\tau \neq \sqrt{2}/(\alpha \sqrt{c(d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)})$ ,  $\forall k, m$ . Зная элементы матрицы  $\widehat{V}^{s+1}$ , несложно восстановить значения решения в узлах коллокации:  $\widehat{U}^{s+1} = R_{\mathcal{A}} \widehat{V}^{s+1} R_{\mathcal{B}}$ .

Аналогичная схема реализуется для поиска  $\widehat{\Upsilon}^{s+1}$ . Решив последовательно уравнения для  $\widehat{\Lambda}_{ij}^{s+1}$ ,  $\widehat{U}^{s+1}$ ,  $\widehat{\Upsilon}^{s+1}$ , переходим на новую итерацию  $s+2$  и так далее, пока не выполняются условия (29). После этого переходим к следующему шагу по времени и снова начинаем цикл итераций по нелинейности. В итоге, при условии сходимости итераций, можем рассчитать значения решения на любом промежутке времени  $t \in [0, t_{\text{end}}]$ . Комментарии о высокой эффективности описанной схемы решения матричных уравнений на каждом шаге  $s$  с точки зрения затрат памяти и числа операций даны в разд. 4.3 работы [13].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для моделирования течения полимерной жидкости в канале 3D принтера под действием импульсов градиента давления и температуры нагревательного элемента зададим параметры, соответствующие геометрическим и механическим характеристикам технологии термоструйной печати с применением раствора электропроводящего полимера PEDOT:PSS. Воспользуемся данными, найденными в открытой печати и представленными в приложении статьи [12] со ссылками на литературу. Перечень параметров модели приведен в табл. 2, а соответствующие значения безразмерных факторов модели указаны в (33). Отметим, что используя данные из табл. 2, решения, найденные в безразмерной форме в результате вычислений, можно преобразовать к размерному виду.

Отметим, что для расчета  $\hat{D}$  полагалось, что длина дюзы в 100 раз больше размера сечения  $l: h = 100$ . В рамках рассматриваемой постановки

$$\text{Re} = 10, \quad W = 0.1, \quad \text{Ra} = 1.06, \quad \text{Pr} = 101.8, \quad \text{Ga} = \text{Ra}/\text{Pr}, \quad \text{Fr} = 31.9. \quad (33)$$

**Замечание 5.** Отметим, что организация механических испытаний для определения значений некоторых реологических параметров полимерной жидкости представляет проблему. В частности, для определения времени релаксации можно использовать различные подходы, которые могут приводить к различным результатам. По этой причине значения, приведенные в табл. 2, дают лишь приближенное описание реальных реологических свойств раствора PEDOT:PSS. В связи с этим интересной задачей для будущих исследований является выявление зависимости критических значений параметров, полученных ниже, от величин  $W, \beta, \text{Re}$ .

В численных экспериментах будем запускать расчеты начальными данными (18) и плавно повышать градиент давления  $A(t) = dP(t)$  при  $t < t_0$  по закону

$$dP(t) = \hat{D} [1 - \exp(-8 \log 10 (t/t_0)^2)], \quad t < t_0. \quad (34)$$

Таблица 2. Параметры модели

Параметр	Описание	Значение
$u_H$	Характерная скорость течения	1 м/с
$l$	Характерная длина (размер сечения канала)	$10^{-4}$ м
$R_0, R_1$	Безразмерные значения больших полуосей сечения канала, фиг. 1	$R_0 = 2\sqrt{0.19}, R_1 = 1$
$r_0, r_1$	Безразмерные значения малых полуосей сечения канала, фиг. 1	$r_0 = 0.1, r_1 = 0.5$
$T_0$	Характерные значения температуры	293.15 K (20° C)
$\eta_0^*$	Начальные значения сдвиговой вязкости раствора PEDOT:PSS	$10^{-2}$ Па·с
$\tau_0^*$	Начальные значения времени релаксации раствора PEDOT:PSS	$10^{-5}$ с
$\bar{E}_A$	Безразмерная энергия активации	6.14
$\hat{D}$	Базовое значение безразмерного градиента давления $A(t)$ , см. (34)	$-1, -10$
$\hat{Y}$	Базовое значение температуры нагревательного элемента $Y_0(t, \gamma)$ , см. (36)	1.2
$\rho$	Плотность жидкости	1000 кг/м <sup>3</sup>
$\beta, k$	Феноменологические параметры	$k = 1.2\beta, \beta = 0.1$
$C_d$	Коэффициент диссипации	0.5

Множитель “ $-8 \log 10$ ” в аргументе экспоненты обеспечивает близость градиента давления к базовому значению  $\hat{D}$  в момент времени  $t = t_0$ :  $\hat{D} - A(t_0) = 10^{-8}$ .

При  $t \geq t_0$  смоделируем импульс градиента давления по временной переменной в соответствии с формулой

$$A(t) = dP_I(t) = \hat{D} \left[ 1 + A_I \exp \left( -\frac{(t - t_I)^2}{2\Delta_I^2} \right) \right], \quad t \geq t_0, \quad (35)$$

либо импульсное изменение температуры нагревательного элемента по формуле

$$Y_0(t, \gamma) = \hat{Y} \left[ 1 + A_Y \exp \left( -\frac{(t - t_I)^2}{2\Delta_Y^2} \right) \right], \quad t \geq t_0, \quad (36)$$

где  $Y_0(t, \gamma)$  – значения температуры на внутренней границе канала, см. (17),  $t_I > t_0 + \Delta_I$ ,  $t_I > t_0 + \Delta_Y$  в случае действия импульсов давления или температуры соответственно.

Все параметры, присутствующие в (34)–(36), описаны в табл. 3. В столбце «Интервал значений» в скобках указаны размерные величины.

Основные параметры вычислительного процесса и их значения приведены в табл. 1.

Отметим, что во всех проведенных расчетах шаг сетки по времени удовлетворял одному из неравенств  $\tau < \Delta_I/10$  или  $\tau < \Delta_Y/10$ .

Таблица 3. Безразмерные параметры импульсных воздействий на жидкость (34)–(36)

Параметр	Описание	Интервал значений
$t_0$	Характеризует время выхода градиента давления на базовое значение $\hat{D}$	4–10 (0.4–1 мс)
$t_I$	Момент времени, когда интенсивность импульса максимальна	8–40 (0.8–4 мс)
$A_I$	Амплитуда импульса градиента давления	$10^{-10^4}$
$A_Y$	Амплитуда импульса температуры	0.2–1.3
$\Delta_I$	Характерная продолжительность импульса градиента давления	0.001–10 ( $10^{-4}$ –1 мс)
$\Delta_Y$	Характерная продолжительность импульса температуры нагревательного элемента	1–30 (0.1–3 мс)

В численных экспериментах будем наблюдать поток и среднюю температуру жидкости в дюзе, рассчитанные по формулам

$$\bar{F} = \int_{\Omega} u(y, z) d|\Omega|, \quad \bar{T} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Y(y, z) d|\Omega|,$$

соответственно, где  $\Omega$  – сечение канала,  $|\Omega|$  – его площадь,  $d|\Omega|$  – элемент площади сечения. Эти значения получены с применением обобщений формул Clenshaw–Curtis [31] для расчета интеграла по области  $\Omega = \{(\zeta, \gamma) : Z_0 \leq \zeta \leq Z_1, 0 \leq \gamma < 2\pi\}$ , где для вычисления  $Z_0, Z_1$  использованы формулы (15), (16) и данные из табл. 2. Ниже  $\bar{F}$  и  $\bar{T}$  приведены в размерном виде.

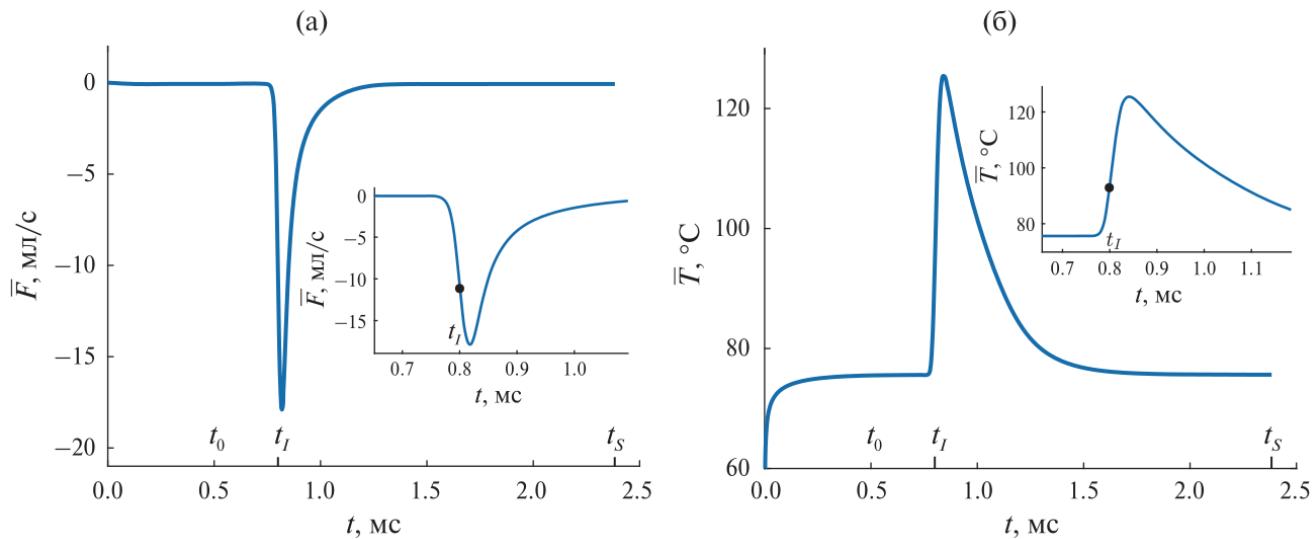
Одной из целей исследования является анализ условий потери устойчивости течения под действием импульсных нагрузок (35), (36). В расчетах с параметрами, заданными в табл. 2, 3, обнаружилось два режима течения: режим, в котором наблюдается расходимость численного решения (как правило, связанная с расходимостью итераций по нелинейности) в некоторой окрестности момента времени  $t = t_I$  и режим, в котором после действия импульса решение в итерациях сходится и устанавливается по времени, т. е. при некотором  $t_S = \bar{N}\tau \gg t_I$  выполняются условия

$$\frac{\|\Lambda_{ij}^N - \Lambda_{ij}^{N-1}\|}{\tau \|\Lambda_{ij}^N\|} \leq \varepsilon_S, \quad \frac{\|U^N - U^{N-1}\|}{\tau \|U^N\|} \leq \varepsilon_S, \quad \frac{\|\bar{Y}^N - \bar{Y}^{N-1}\|}{\tau \|\bar{Y}^N\|} \leq \varepsilon_S, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (37)$$

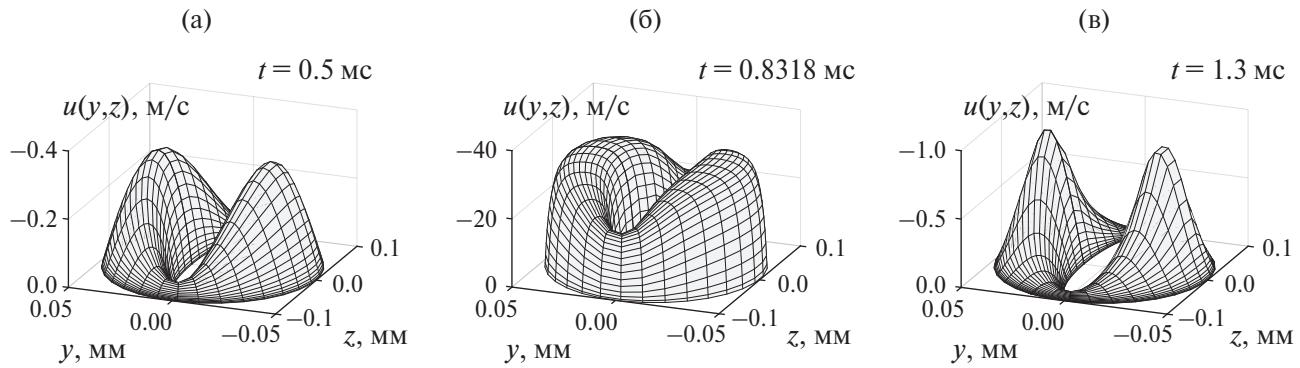
с малыми значениями  $\varepsilon_S$ , указанными в табл. 1.

На фиг. 2–4 приведены результаты расчетов при наличии импульса градиента давления с параметрами  $t_I = 0.8$  мс,  $\Delta_I = 0.015$  мс,  $A_I = 100$ ,  $\hat{D} = -1$  при фиксированной температуре нагревательного элемента  $Y_0(t, \gamma) \equiv 1.2$  (что приблизительно равно  $79^{\circ}\text{C}$ ). Поскольку скорость жидкости противоположно направленна оси  $x$  (такая ситуация реализуется при  $\hat{D} < 0$ ), см. фиг. 1а, то значения скорости и потока жидкости, приведенные на графиках, являются отрицательными. Отметим сложную зависимость потока и средней температуры жидкости от времени. На фиг. 2 видны пики графиков, причем точки максимума пиков лежат правее точки  $t = t_I$ , что характеризует запаздывание эффекта от действия импульса, связанное с релаксацией полимерной жидкости.

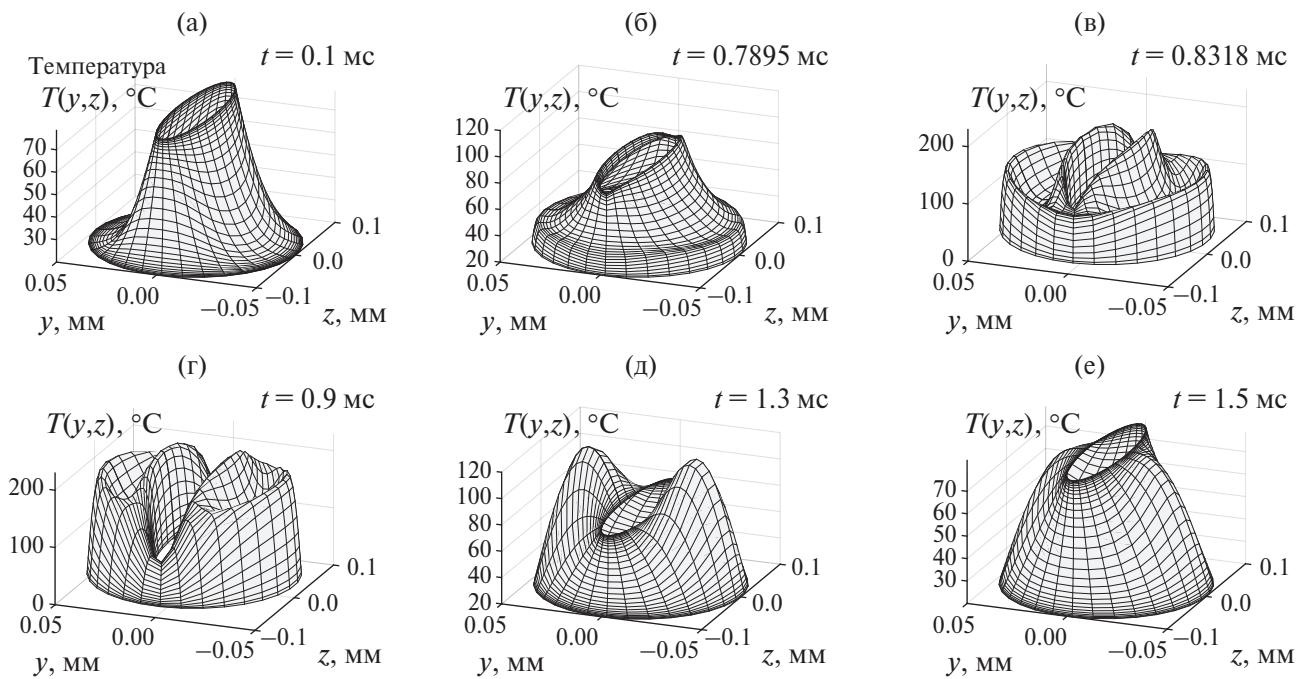
Стократное увеличение давления в дюзе ( $A_I = 100$ ) приводит к примерно десятикратному пиковому увеличению скорости жидкости, см. фиг. 3, которая затем достаточно быстро уменьшается в окрестности стенок канала и медленнее в окрестности координатной линии  $\zeta = (Z_0 + Z_1)/2$ . Отметим, что скачок температуры на фиг. 2б связан с диссипацией кинетической энергии жидкости, его величина определяется в основном параметром  $C_d$ . При этом динамика распределения температуры в дюзе оказывается весьма сложной, см. фиг. 4.



**Фиг. 2.** Зависимость потока жидкости в канале (а) и средней температуры жидкости (б) от времени при наличии импульса градиента давления с параметрами  $t_0 = 0.5$  мс,  $t_I = 0.8$  мс,  $\Delta_I = 0.015$  мс (безразмерное значение  $\Delta_I = 0.15$ ),  $A_I = 100$ ,  $\hat{D} = -1$ ,  $\tau = 5 \times 10^{-3}$ ,  $K = 31$ ,  $M = 21$ . На вставках показана динамика  $\bar{F}$  и  $\bar{T}$  в окрестности момента времени  $t_I$ , который отмечен точкой.



Фиг. 3. Распределение скорости жидкости при наличии импульса градиента давления в разные моменты времени  $t$ :  $t = t_0 = 0.5$  мс (а), сразу после импульса  $t = 0.8318$  мс (б), при выходе на стационарный режим  $t = 1.3$  мс.

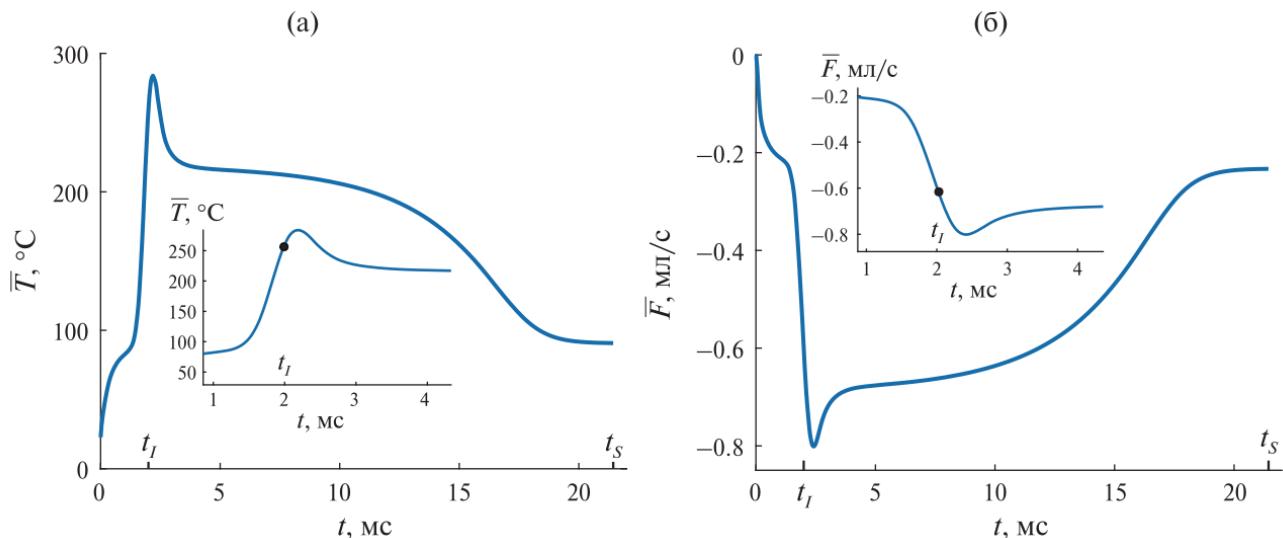


Фиг. 4. Распределение температуры жидкости при наличии импульса градиента давления в разные моменты времени  $t$ .

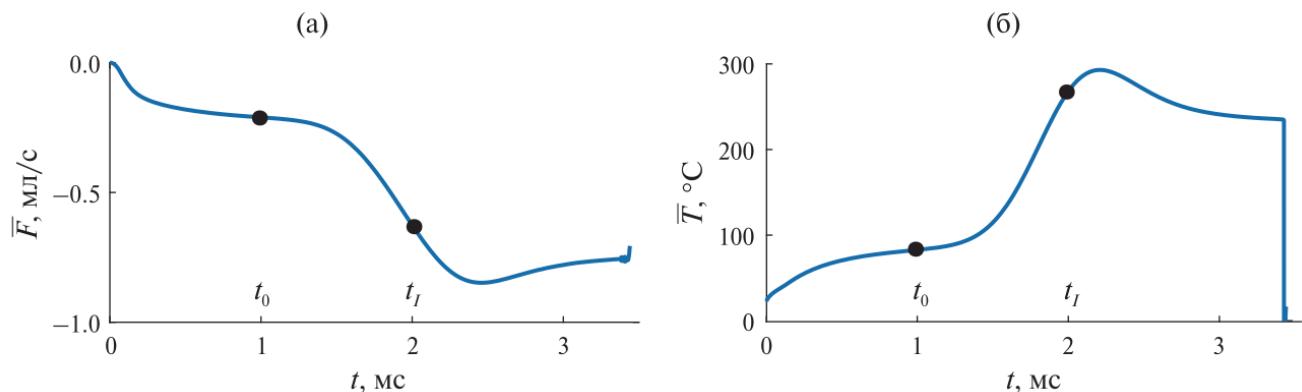
Подчеркнем, что в этом эксперименте значения температуры на границе канала поддерживаются постоянными. В соответствии с критерием (37) система стабилизируется примерно через 1.5 мс после действия импульса ( $t_S = 2.383$ ,  $\varepsilon_S = 10^{-3}$ ).

На фиг. 5 изображена динамика средней температуры и потока жидкости в дюзе при импульсном изменении температуры нагревательного элемента. Отметим, что эта динамика качественно отличается от поведения тех же величин на фиг. 2. Время установления течения существенно возрастает. При действии импульса величины  $|\bar{F}|$  и  $\bar{T}$  сначала резко возрастают, затем падают на небольшую величину и выходят на промежуточное «плато», затем идет их дальнейшее плавное уменьшение, темп которого существенно зависит от параметра  $Re$ .

Результаты, показанные на фиг. 2–5, получены для значений параметров достаточно близких к критическим, т.е. при небольшом увеличении амплитуд или продолжительностей импульсов приближенное решение не устанавливается, поскольку итерации по нелинейности перестают сходиться. Важно отметить, что авторами проведено значительное количество численных экспериментов, из которых следует, что изменение числа узлов пространственной сетки, шага по времени (и даже замена схемы (19) на известные схемы первого, либо четвертого порядков) и других численных параметров практически не влияет на критические значения  $\Delta_I$ ,  $\Delta_Y$ ,  $A_I$ ,  $A_Y$ . Таким образом, можно утверждать, что расходимость численного решения связана с отсутствием действитель-



**Фиг. 5.** Зависимость средней температуры жидкости в канале (а) и потока жидкости (б) от времени при импульсном изменении температуры нагревательного элемента с параметрами  $t_0 = 0.942$  мс,  $t_I = 2$  мс,  $\Delta_Y = 0.27$  мс (безразмерное значение  $\Delta_Y = 2.7$ ),  $A_Y = 1$ ,  $\hat{D} = -10$ ,  $\tau = 2.5 \times 10^{-3}$ ,  $K = 31$ ,  $M = 21$ . На вставках показана динамика  $\bar{F}$  и  $\bar{T}$  в окрестности момента времени  $t_I$ , который отмечен точкой.



**Фиг. 6.** Зависимость потока в канале (а) и средней температуры жидкости (б) от времени при импульсном изменении температуры нагревательного элемента с параметрами  $t_0 = 0.942$  мс,  $t_I = 2$  мс,  $\Delta_Y = 0.3$  мс (безразмерное значение  $\Delta_Y = 3$ ),  $A_Y = 1$ ,  $\hat{D} = -10$ ,  $\tau = 2.5 \times 10^{-3}$ ,  $K = 31$ ,  $M = 21$ . Точками отмечены моменты времени  $t_0$  и  $t_I$ .

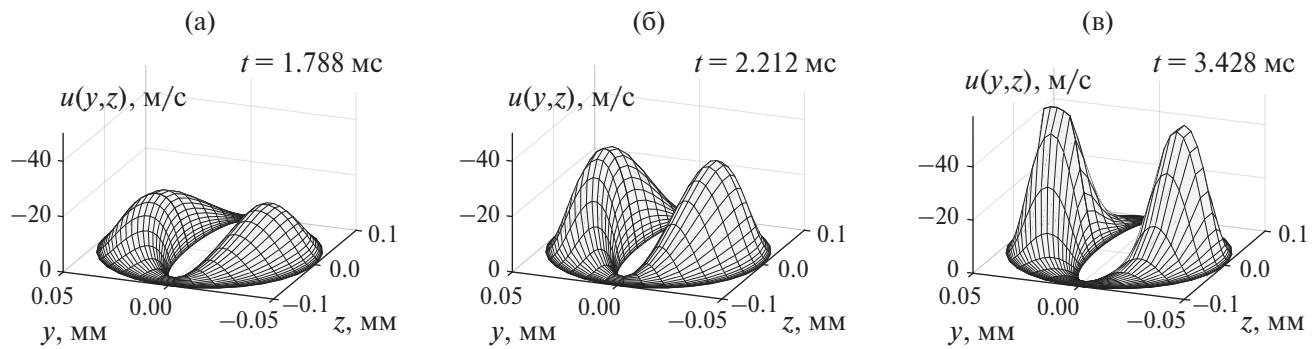
ных ветвей точных решений исследуемых уравнений. Более строгие рассуждения, проведенные в аналогичном случае для одномерной задачи и основанные на построении точных решений, приведены в [8].

На фиг. 6 показаны значения  $\bar{F}$  и  $\bar{T}$  в режиме с параметрами близкими к указанным в подписи к фиг. 5, при увеличении  $\Delta_Y$  до значения 0.3 мс.

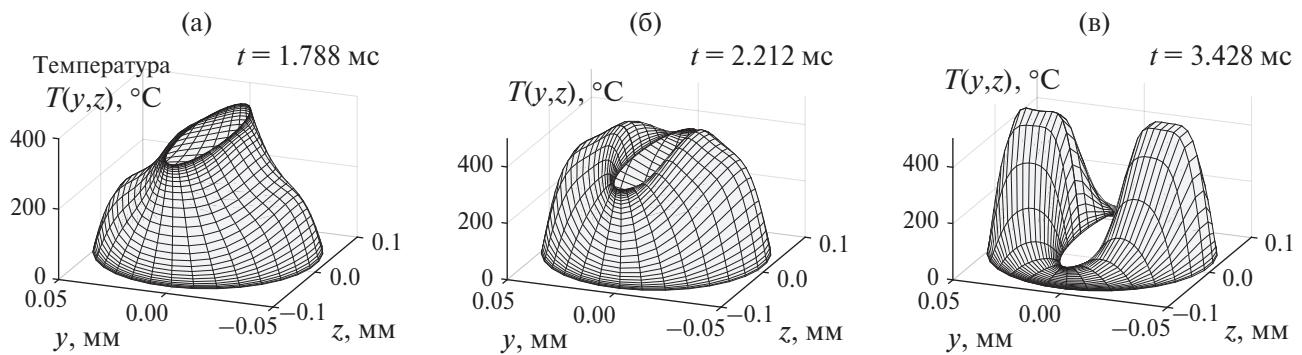
В таком случае численное решение расходится при  $t = 3.44$  мс. На фиг. 7, 8 изображены распределения значений скорости и температуры в этом режиме. Видно, что под воздействием импульса температура жидкости внутри канала повышается и превышает температуру нагревательного элемента  $Y_0$ , вследствие чего уменьшаются вязкость и время релаксации жидкости, и скорость повышается. Далее при уменьшении  $Y_0$  до базовых значений  $\hat{Y}$  температура жидкости внутри канала остается предельно высокой, что приводит к дальнейшему росту скорости и к расходимости решения.

Отметим, что расходимость численного решения при воздействии импульса температуры можно наблюдать только тогда, когда значения градиента давления лежат в достаточно малой окрестности критических величин  $|\hat{D}| = \hat{D}_{\text{crit}} \approx 10.526$  атм, т. е. таких значений, при которых решение расходится без импульсных воздействий. Например, в проведенных расчетах действие импульса температуры с параметрами  $A_Y = 1$ ,  $\Delta_Y = 1$  мс уже не приводит к расходимости численного решения, если  $|\hat{D}| < 8.245$  атм.

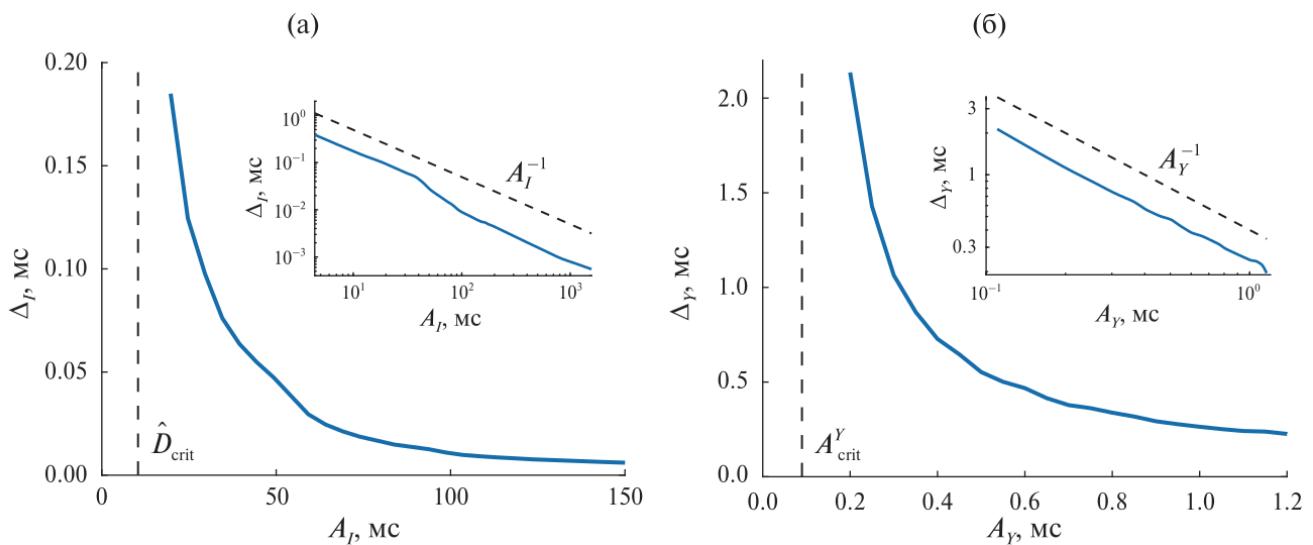
На фиг. 9 при  $\hat{D} = -10$  изображены критические соотношения размерных продолжительности и амплитуды импульсов градиента давления и температуры, т.е. такие значения, при превышении которых численное



**Фиг. 7.** Распределение скорости жидкости при наличии импульса температуры в разные моменты времени  $t$ : непосредственно до достижения максимальной интенсивности импульса  $t = 1.788$  мс (а), после действия импульса  $t = 2.212$  мс (б), перед расходимостью численного решения при  $t = 3.428$  мс.



**Фиг. 8.** Распределение температуры жидкости при наличии импульса температуры нагревательного элемента в те же моменты времени, что на фиг. 7.



**Фиг. 9.** Критические соотношения амплитуды и продолжительности импульсов давления (а) и температуры (б). На вставках – графики в логарифмическом масштабе.

решение расходится, что можно ассоциировать с переходом к сложной непуазейлевской и турбулентной динамике. Как видно из графиков, для существования пуазейлевского течения при наличии импульсов большей амплитуды требуется сокращать продолжительность импульса и наоборот, для использования продолжительных импульсов – сокращать их амплитуду. На вставках к графикам фиг. 9 критические соотношения показаны в логарифмической шкале, откуда видно, что эти соотношения близки к обратной пропорции. Отметим также, что в рассчитанном режиме существует критическое базовое значение температуры нагревательного элемента  $\hat{Y}_{\text{crit}} = 1.3 \approx 108^\circ\text{C}$ , которому соответствует критическое значение амплитуды  $A_Y^{\text{crit}} = 0.0898$ . При задании температуры нагревательного элемента ниже этого значения действие импульсов температуры любой продолжительности не приводит к расходимости численного решения. Отметим также, что значения  $A_Y$  на фиг. 9б являются довольно малыми по сравнению с  $A_I$  на фиг. 9а, однако увеличение  $A_Y$  выше значений порядка 1.2 приведет к нефизичным результатам, поскольку в таком случае температура нагревательного элемента превысит  $400^\circ\text{C}$ , что близко к температуре спекания или возгорания многих полимерных жидкостей.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье на основе мезоскопического подхода построена модель, описывающая неизотермическое течение пуазейлевского типа несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с сечением в виде области между двумя софокусными эллипсами. Модель использована для расчета течений, возникающих в технологиях 3D печати электропроводящим материалом на полимерной основе, при наличии импульсов градиента давления и температуры. В этом приложении канал представляет собой дюзу принтера, а его внутреннее включение – нагревательный элемент.

С целью численного решения начально-краевой задачи, поставленной для уравнений построенной модели, разработан и реализован вычислительный алгоритм, основанный на полиномиальных и дробно-рациональных интерполяциях и применении конечно-разностной схемы по времени, объединенной с итерациями по нелинейности.

Проведен анализ распределений скорости и температуры жидкости в канале, а также зависимостей потока и средней температуры жидкости от времени. Исследован процесс потери устойчивости пуазейлевских течений под воздействием импульсов градиента давления и температуры. Рассчитаны критические соотношения между амплитудами и продолжительностями импульсов. Эти соотношения близки к обратной пропорции.

В качестве дальнейшего развития модели имеет смысл учесть более тонкие реологические эффекты, см. [32], а также тот факт, что плотность жидкости может изменяться при резком изменении температуры, особенно в случае неравномерного нагрева внутренней стенки канала по координате  $\gamma$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nourdine A., Flandin L., Alberola N. et al.* Extrusion of a nano-ordered active layer for organic photovoltaic cells // Sustainable Energy & Fuels. 2017. Vol. 1. Is. 9. P. 2016–2027.
2. *Orrill M., LeBlanc S.* Printed thermoelectric materials and devices: Fabrication techniques, advantages and challenges // J. Appl. Polym. Sci. 2017. Vol. 134. Art. #44256.
3. *Datta S.S., Ardekani A.M., Arratia P.E. et al.* Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2022. Vol. 7. Art. #080701.
4. *McKinley G. H., Pakdel P., Oztekin A.* Rheological and geometric scaling of purely elastic flow instabilities // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. Vol. 67. P. 19–47.
5. *Khalid M., Shankar V., Subramanian G.* A continuous pathway between the elasto-inertial and elastic turbulent states in viscoelastic channel flow // Phys. Rev. Lett. 2021. Vol. 127. Art. #134502.
6. *Chandra B., Shankar V., Das D.* Onset of transition in the flow of polymer solutions through microtubes // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 844. P. 1052–1083.
7. Семисалов Б.В. О точных решениях пуазейлевского типа для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 4. С. 139–151.
8. Семисалов Б.В. Об одном сценарии перехода к турбулентности при течении полимерной жидкости в цилиндрическом канале // Матем. моделирование. 2023. Т. 35. № 11. С. 62–78.

9. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В., Кошелев К.Б. Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012.
10. Pokrovskii V. N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 2010.
11. Брындин Л.С., Семисалов Б.В., Беляев В.А., Шапеев В.П. Численный анализ разрушения одномерного течения полимерной жидкости с фронтом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 1. С. 162–175.
12. Блохин А.М., Семисалов Б.В. Расчет стационарных неизотермических МГД течений полимерной жидкости в каналах с внутренними нагревательными элементами // Сиб. журнал индустр. матем. 2020. Т. 23. № 2. С. 17–40.
13. Блохин А.М., Семисалов Б.В. Нахождение стационарных течений пуазейлевского типа для несжимаемой полимерной жидкости методом установления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 2. С. 305–319.
14. Blokhin A.M., Semisalov B.V. Numerical simulation of a stabilizing Poiseuille-type polymer fluid flow in the channel with elliptical cross-section // J. of Phys.: Conf. Ser. 2021. Vol. 2099. Art. #012014. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2099/1/012014/pdf>
15. Baltensperger R., Berrut J.-P., Noel B. Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points // Math. Comp. 1999. Vol. 68. P. 1109–1120.
16. Семисалов Б. В. Применение дробно-рациональных интерполяций для решения краевых задач с особенностями // Вестн. ЮУрГУ ММП. 2022. Т. 15. № 4. С. 5–19.
17. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
18. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
19. Pai Shih-I. Introduction to the Theory of Compressible Flow. Literary Licensing, LLC. 2013.
20. Pokrovskii V. N., Altukhov Yu. A., Pyshnograi G. V. The mesoscopic approach to the dynamics of polymer melts: consequences for the constitutive equation // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1998. Vol. 76. P. 153–181.
21. Блохин А.М., Семисалов Б.В. Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // Сиб. журнал индустр. матем. 2014. Т. XVII. № 4 (60). С. 38–47.
22. Зинович С. А., Головичёва И. Э., Пышнограй Г. В. Влияние молекулярной массы на сдвиговую и продольную вязкость линейных полимеров // Прикл. механ. и техн. физ. 2000. Т. 41. № 2. С. 154–160.
23. Semisalov B.V., Belyaev V.A., Bryndin L.S., Gorynin A. G., Blokhin A. M., Golushko S.K., Shapeev V. P. Verified simulation of the stationary polymer fluid flows in the channel with elliptical cross-section // Appl. Math. and Comp. 2022. Vol. 430. Art. #127294. P. 1–25.
24. Семисалов Б.В. Быстрый нелокальный алгоритм решения краевых задач Неймана–Дирихле с контролем погрешности // Вычисл. методы и программирование. 2016. Т. 17. № 4. С. 500–522.
25. Семисалов Б.В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1110–1135.
26. Schneider C., Werner W. Some new aspects of rational interpolation // Math. Comp. 1986. Vol. 47. P. 285–299.
27. Семисалов Б.В., Кузьмин Г. А. К вопросу о приближении гладких функций с погранслойными составляющими // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 111–124.
28. Semisalov B.V., Kuzmin G.A. Modification of Fourier Approximation for Solving Boundary Value Problems Having Singularities of Boundary Layer Type // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1839. P. 406–422. <https://ceur-ws.org/Vol-1839/MIT2016-p36.pdf>
29. Salzer H. E Lagrangian interpolation at the Chebyshev points  $x_{n,v} = \cos(v\pi/n)$ ,  $v = O(1)n$ ; some unnoted advantages // Comput. J. 1972. Vol. 15. P. 156–159.
30. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

31. Gentleman W. M. Implementing Clenshaw–Curtis quadrature, II: Computing the cosine transformation // Comm. ACM. 1972. Vol. 15. P. 343–346.
32. Лаас А.А., Макарова М.А., Малыгина А.С., Рудаков Г.О., Пышнограй Г.В. Уточнение релогической модели для описания линейной и нелинейной вязкоупругости полимерных систем // Вычисл. механ. сплошных сред. 2021. Т. 14. № 1. С. 12–29.

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE STABILITY LOSS FOR POISEUILLE-TYPE POLYMER FLUID FLOWS UNDER THE PULSED EFFECT OF PRESSURE AND TEMPERATURE

B. V. Semisalov<sup>a,c,\*</sup>, I. A. Bugoets<sup>a,b,c, \*\*</sup>, L. I. Kutkin<sup>b,c, \*\*\*</sup>, V. P. Shapeev<sup>b,c, \*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, pr. Akademika Koptyuga 4, 630090 Novosibirsk, Russia*

<sup>b</sup>*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Institutskaya ul. 4/1, 630090 Novosibirsk, Russia*

<sup>c</sup>*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 2, 630090 Novosibirsk, Russia*

\*e-mail: vibis87@gmail.com

\*\*e-mail: i.bugoets@g.nsu.ru

\*\*\*e-mail: l.kutkin@g.nsu.ru

\*\*\*\*e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Received September 10, 2024

Revised November 2, 2024

Accepted November 8, 2024

**Abstract.** A system of non-stationary partial differential equations is obtained that describes non-isothermal Poiseuille-type flows of an incompressible viscoelastic polymer fluid in a channel with a cross-section between two confocal ellipses. For the system we posed an initial boundary value problem that describes the flow in a 3D printer nozzle with a heating element under the pulsed action of the pressure gradient in the nozzle and of the temperature of the element. For the numerical solution of the problem, an algorithm is developed that takes into account the singularities of the sought-for functions and is based on polynomial and rational approximations in spatial variables and on the use of an implicit difference scheme in time. The distributions of the velocity and temperature of the fluid in the channel, as well as the dependences of the flow rate and of the average temperature on time are studied, the critical relationships between the values of the amplitudes and durations of impulses acting on the fluid, when setting which the flow loses stability, are calculated.

**Keywords:** polymer fluid, mesoscopic rheological model, pulse action, Poiseuille-type flow, loss of stability, critical relations between parameters, polynomial with Dirichlet kernel, rational barycentric interpolation