ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 2, с. 193–202

УДК 519.6

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ БИКОМПАКТНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

 А. А. Белов[1,]*, Ж. О. Домбровская[1,]**

[1] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия
*e-mail: aa.belov@physics.msu.ru
**e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 10.05.2024 г.
Переработанный вариант 18.10.2024 г.
Принята к публикации 08.11.2024 г.

Одномерные задачи для системы уравнений Максвелла охватывают широкий круг важных прикладных проблем. Среди них – задачи фотоники, плазмоники, СВЧ-техники и др. Для таких задач нами ранее была предложена бикомпактная (двухточечная полностью консервативная) разностная схема. Построено точное решение соответствующей системы сеточных уравнений. Оно применимо для задач в кусочно-однородных средах при произвольной конфигурации объемных и поверхностных токов. Построенное решение позволяет кардинально снизить трудоемкость расчета таких задач. Библ. 8.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, слоистые среды, бикомпактные схемы.

DOI: 10.31857/S0044466925020063, **EDN**: CBNFKO

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Интегральная фотоника – это направление оптики, посвященное исследованию наноразмерных устройств, которые позволяют управлять излучением в ближнем ИК- и видимом диапазоне. Оптические наноструктуры могут быть основой многих перспективных технических систем: детекторов, логических элементов, модуляторов, волноводов, элементов оптической вычислительной техники и т.д.

Для планирования экспериментов, а также для разработки новых технических систем широко применяется численное моделирование. В задачах фотоники присутствуют границы раздела сред, на которых материальные параметры изменяются скачком. Существующие разностные методы в таких задачах имеют значительную погрешность, и достижение высокой точности требует больших объемов вычислений. Это особенно важно при решении задач проектирования, в ходе которых требуется многократное решение прямой задачи с направленным варьированием параметров.

2. Подробный обзор известных подходов приведен в [1]. Многие известные алгоритмы для решения уравнений Максвелла (матричные методы, методы дискретных источников, модальные методы, псевдоспектральные методы, методы мультипольной аппроксимации, методы конечных разностей и конечных элементов в частотной области) дают хорошие результаты для достаточно узких классов задач.

Наиболее универсальны методы конечных разностей (FD-time domain), конечных элементов (FE-time domain) и конечных объемов (FV-time domain) во временной области. Практически все они сводятся к схеме типа «крест», в которой электрическое и магнитное поля относятся к целым и полуцелым пространственным узлам и временным слоям.

Алгоритмы FDTD, FETD, FVTD имеют следующие принципиальные недостатки: 1) ни в одном из них не реализованы физически корректные условия сопряжения на границах раздела сред, поэтому методы данного класса не являются полностью консервативными, что приводит к резкому ухудшению точности и появлению нефизичных пилообразных осцилляций численного решения; 2) в случае сильно диспергирующих сред известные методы вносят существенную погрешность.

3. Эти недостатки удалось преодолеть в предложенных нами бикомпактных схемах и методе спектрального разложения (см. [2]). Это двухточечные полностью консервативные схемы, основанные на сеточной аппроксимации интегральных уравнений Максвелла и условий сопряжения на границах раздела сред. Поэтому бикомпактные схемы сходятся как на гладких, так и на обобщенных решениях. В методе спектрального разложения немонохроматическая задача сводится к набору монохроматических задач с помощью сеточного преобразования Фурье. Это позволяет учитывать произвольный закон частотной дисперсии. Расчеты тестовых и

прикладных задач (см. [3]) убедительно показали преимущества бикомпактных схем и метода спектрального разложения по сравнению с другими известными подходами.

Таким образом, бикомпактные схемы и метод спектрального разложения представляются наиболее перспективными подходами. Актуально их дальнейшее развитие, связанное с уменьшением трудоемкости расчета.

4. Бикомпактная разностная схема есть система большого количества линейных алгебраических уравнений. Ее матрица имеет ленточную структуру. В общем случае для ее решения целесообразно применять метод Гаусса для ленточных матриц. Однако есть ряд важных частных случаев, когда эта система допускает явное решение в конечном виде. Подобные случаи являются уникальными. По экономичности такие решения превосходят даже явные схемы бегущего счета (см. [4]). Насколько нам известно, единственное ранее известное решение такого класса было построено Калиткиным для схем бегущего счета для уравнения Ван–Хопфа (см. [5]). К сожалению, оно не было опубликовано в открытой печати.

В настоящей статье построено явное решение бикомпактной разностной схемы для системы монохроматических уравнений Максвелла. Оно справедливо для кусочно-однородных диэлектрических сред, в которых текут заданные объемные и поверхностные токи. Вкупе с методом спектрального разложения это решение можно использовать для расчета немонохроматических задач. Такие постановки охватывают достаточно широкий круг важных прикладных задач. Предлагаемое решение позволяет кардинально снизить трудоемкость их расчета.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим плоскопараллельный рассеиватель, состоящий из Q пластин (диэлектрических либо проводящих). Пусть декартова ось z ориентирована перпендикулярно рассеивателю. Поле E направлено вдоль оси x, поле H – вдоль оси y. На границах раздела $z = \xi_q$ диэлектрическая проницаемость ε, магнитная восприимчивость μ и проводимость σ меняются скачком.

На рассеиватель из обоих направлений оси z нормально падают плоские линейно поляризованные монохроматические волны. В проводящих пластинах текут внешние монохроматические токи $J_q^{\text{ext}}(z)$, параллельные границам раздела. Поле индуцирует токи проводимости σE. По границам раздела текут монохроматические поверхностные токи с объемной плотностью $\sim \delta(z-\xi_q)$. Они могут быть внешними j_q^{ext} и индуцированными $\sigma^{\text{surf}}E$.

2. Данная задача описывается системой монохроматических уравнений Максвелла. Запишем ее в интегральной форме

$$\int_\Gamma \mathbf{H}_q d\mathbf{l} - \frac{4\pi}{c}\int_S \sigma_q \mathbf{E}_q d\mathbf{s} + \frac{i\omega}{c}\int_S \mathbf{D}_q d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}_q^{\text{ext}} d\mathbf{s}, \quad \mathbf{D}_q = \varepsilon_q \mathbf{E}_q, \tag{1}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{E}_q d\mathbf{l} = \frac{i\omega}{c}\int_S \mathbf{B}_q d\mathbf{s}, \quad \mathbf{B}_q = \mu_q \mathbf{H}_q. \tag{2}$$

Здесь S – произвольная поверхность, ограниченная контуром Γ, ω – частота поля, c – скорость света в вакууме.

На границах расчетной области ставят условия излучения

$$\partial\mathbf{E}_1/\partial z + ik_0\mathbf{E}_1 = 2ik_0\mathbf{E}^0,\ z = 0; \quad \partial\mathbf{E}_Q/\partial z - ik_a\mathbf{E}_Q = 2ik_a\mathbf{E}^a e^{-ika}, \quad z = a; \tag{3}$$

на границах раздела сред – условия сопряжения

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_{q-1}) = 0, && \mathbf{e}_z(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_{q-1}) = 0,\\ &\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_q - \mathbf{H}_{q-1}) - 4\pi c^{-1}\sigma_q^{\text{surf}}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_q = 4\pi c^{-1}\mathbf{j}_q^{\text{ext}}, && \mathbf{e}_z(\mathbf{B}_q - \mathbf{B}_{q-1}) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

3. БИКОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Введем специальную сетку $\{z_n\}$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $\Delta z_{n+1/2} = z_{n+1} - z_n$, у которой границы слоев являются узлами (см. [6]). Для каждого шага $\Delta z_{n-1/2}$, $1 \le n \le N$, введем значения полей E_{2n-2}, H_{2n-2}, относящиеся к левой границе z_{n-1}, и значения полей E_{2n-1}, H_{2n-1}, относящиеся к правой границе z_n.

Интегралы вычислим по формуле трапеций. Условия сопряжения аппроксимируются точно. Производные $\partial\mathbf{E}_1/\partial z$, $\partial\mathbf{E}_Q/\partial z$ выразим из дифференциального уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E}_q = i\omega c^{-1}\mu_q\mathbf{H}_q$, записанного в узлах z_0 и z_N. Получим бикомпактную разностную схему (см. [1])

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0 + \sqrt{\mu_0}H_0 = 2\sqrt{\varepsilon_0}E^0, \tag{5}$$

$$H_{2n} - H_{2n-2} + \alpha_{n-1/2}\Delta z_{n-1/2}(E_{2n} + E_{2n-2}) + \frac{4\pi}{c}\sigma_n^{\text{surf}}E_{2n} = \frac{4\pi}{c}(J_{n-1/2}\Delta z_{n-1/2} - j_n), \tag{6}$$

$$E_{2n} - E_{2n-2} - \frac{i\omega}{2c}\mu_{n-1/2}\Delta z_{n-1/2}(H_{2n} + H_{2n-2}) - \frac{4\pi}{c}\sigma_n^{\text{surf}}E_{2n} = \frac{4\pi i\omega}{2c^2}\mu_{n-1/2}\Delta z_{n-1/2}j_n, \tag{7}$$

$$\sqrt{\varepsilon_N}E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N}H_{2N-1} = 2\sqrt{\varepsilon_N}E^a. \tag{8}$$

Здесь $\alpha = -i\omega\varepsilon c^{-1} + 4\pi c^{-1}\sigma$. В уравнениях (6), (7) индекс n пробегает значения от 1 до N. В последнем N-м узле сетки поля считаем непрерывными, так что $E_{2N-1} = E_{2N}$, $H_{2N-1} = H_{2N}$. Таким образом, система (5)–(8) содержит $2N + 2$ уравнения. Ее матрица является пятидиагональной.

Построим явное решение этой системы разностных уравнений. Сначала рассмотрим ряд простых частных задач и установим общие закономерности поведения решения, затем воспользуемся принципом суперпозиции.

4. ОДНОРОДНАЯ СРЕДА

1. Рассмотрим задачу об однородной среде $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\varepsilon \neq \mu$. Пусть слева падает волна с амплитудой E^0, а волна справа отсутствует $E^a = 0$. Пусть сначала сетка содержит $N = 1$ шаг $\Delta z_{1/2}$. Тогда разностная схема содержит четыре уравнения

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\mu}H_0 + \sqrt{\varepsilon}E_0 = 2\sqrt{\varepsilon}E^0, & E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_2 + H_0) = 0, \\ H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, & \sqrt{\mu}H_2 - \sqrt{\varepsilon}E_2 = 0. \end{array} \tag{9}$$

Здесь введено обозначение

$$\beta_{1/2} = 0.5i\frac{\omega}{c}\Delta z_{1/2}. \tag{10}$$

Из условий сопряжения следует, что в данной задаче поля E и H непрерывны в узлах. Поэтому можно использовать только значения полей E_{2n}, H_{2n} с четными индексами, считая, что значения полей с нечетными индексами исключены из системы.

Решение системы (9) имеет следующий вид:

$$E_0 = E^0, \quad H_0 = E^0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad E_2 = E^0\frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}, \quad H_2 = E^0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}. \tag{11}$$

Здесь $\mathrm{n} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления. Легко видеть, что

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{H_2}{H_0} = \frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}} \equiv A_{1/2}. \tag{12}$$

Величину $\ln A_{1/2}$ можно трактовать как набег фазы волны при переходе от точки 0 к точке $\Delta z_{1/2}$. Нетрудно убедиться, что она совпадает с точным значением $2\beta_{1/2}\mathrm{n}\Delta z_{1/2}$ с точностью до членов $O(\Delta z^2)$.

2. Пусть теперь сетка содержит $N = 2$ ячейки $\Delta z_{1/2}$, $\Delta z_{3/2}$. Запишем соответствующую систему разностных уравнений

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\mu}H_0 + \sqrt{\varepsilon}E_0 = 2\sqrt{\varepsilon}E^0, & E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_2 + H_0) = 0, \\ H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, & E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu(H_4 + H_2) = 0, \\ H_4 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon(E_4 + E_2) = 0, & \sqrt{\mu}H_4 - \sqrt{\varepsilon}E_4 = 0. \end{array} \tag{13}$$

Величина $\beta_{3/2}$ определяется аналогично (10).

Решение системы (13) имеет следующий вид. Компоненты E_0, H_0, E_2, H_2 совпадают с (11), компоненты E_4, H_4 равны

$$E_4 = E^0\frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}\frac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, \quad H_4 = E^0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}\frac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}. \tag{14}$$

Имеют место соотношения

$$\frac{E_4}{E_2} = \frac{H_4}{H_2} = \frac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}} \equiv A_{3/2}. \tag{15}$$

Таким образом, решение задачи (13) можно представить в виде

$$\begin{array}{lll} E_0 = E^0, & E_2 = A_{1/2}E_0, & E_4 = A_{1/2}A_{3/2}E_0; \\ H_0 = \sqrt{\varepsilon/\mu}E^0, & H_2 = A_{1/2}H_0, & H_4 = A_{1/2}A_{3/2}H_0. \end{array} \tag{16}$$

Формулы (16) имеют простую физическую интерпретацию. Волна распространяется сначала на шаг $\Delta z_{1/2}$, затем на шаг $\Delta z_{3/2}$. Материальные параметры в ячейках $\Delta_{1/2}$ и $\Delta_{3/2}$ одинаковы, поэтому переотражений от границ ячеек не возникает. Значения полей E_2, H_2 в узле $n = 1$ можно трактовать как граничные условия для области, состоящей из шага $\Delta z_{3/2}$. Поэтому к ней можно снова применить формулы (11), заменив $E^0 \to E_2$. Аналогично можно поступить в случае сетки, содержащей $N = 3$ интервала и т.д.

3. В (16) легко просматривается закономерность, которая позволяет выписать решение для сетки с произвольным числом шагов. Это решение имеет следующий вид:

$$E_{2n} = E^0 \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \beta_{k-1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{k-1/2}\mathrm{n}}, \quad H_{2n} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{2n}. \tag{17}$$

Формулу (17) нетрудно доказать по индукции.

4. Полностью аналогично строится решение для случая, когда волна с амплитудой $E^a \neq 0$ падет из $z = +\infty$, а волна из $z = -\infty$ отсутствует ($E^0 = 0$). Тогда в (17) нужно заменить $E^0 \to E^a$ и изменить знак у H:

$$E_{2n} = E^a \prod_{k=n}^{N-1} \frac{1 + \beta_{k-1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{k-1/2}\mathrm{n}}, \quad H_{2n} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{2n}. \tag{18}$$

По принципу суперпозиции, если оба граничных условия являются ненулевыми, то нужно взять сумму (17), (18).

5. ОБЪЕМНЫЕ ТОКИ

1. Рассмотрим задачу об однородной среде, в которой течет объемный ток. Пусть сетка содержит $N = 1$ ячейку, в которой течет ток с плотностью $J_{1/2}$. Пусть волны, падающие из бесконечности, отсутствуют: $E^0 = E^a = 0$. Разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} &\sqrt{\varepsilon}E_0 + \sqrt{\mu}H_0 = 0, && E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_2 + H_0) = 0, \\ &H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = \frac{4\pi}{c} J_{1/2}\Delta z_{1/2}, && \sqrt{\varepsilon}E_2 - \sqrt{\mu}H_2 = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Решение этой разностной задачи имеет вид

$$E_0 = E_2 = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{J_{1/2}\Delta z_{1/2}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}} \equiv \mathcal{E}^J_{1/2}, \quad H_0 = -H_2 = -\frac{2\pi}{c} \frac{J_{1/2}\Delta z_{1/2}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}. \tag{20}$$

Имеют место закономерности $H_2 = -\sqrt{\varepsilon/\mu}E_2$, $H_0 = \sqrt{\varepsilon/\mu}E_0$. Величина $\mathcal{E}^J_{1/2}$ есть функция точечного источника, соответствующего объемным токам.

2. Пусть теперь сетка содержит $N = 3$ ячейки, причем плотность тока $J_{3/2} \neq 0$, относящаяся к среднему шагу, отлична от нуля, а токи в крайних шагах $J_{1/2} = J_{5/2} = 0$ равны нулю. Запишем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} &\sqrt{\varepsilon}E_0 + \sqrt{\mu}H_0 = 0, && E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_2 + H_0) = 0, \\ &H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, && E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu(H_4 + H_2) = 0, \\ &H_4 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon(E_4 + E_2) = \frac{4\pi}{c} J_{3/2}\Delta z_{3/2}, && E_6 - E_4 - \beta_{5/2}\mu(H_6 + H_4) = 0, \\ &H_6 - H_4 - \beta_{5/2}\varepsilon(E_6 + E_4) = 0, && \sqrt{\varepsilon}E_6 - \sqrt{\mu}H_6 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Решение этой разностной задачи имеет вид

$$\begin{gathered} E_0 = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{J_{3/2}\Delta z_{3/2}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}} \frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}, \quad E_2 = E_4 = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{J_{3/2}\Delta z_{3/2}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, \\ E_6 = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{J_{3/2}\Delta z_{3/2}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}} \frac{1 + \beta_{5/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{5/2}\mathrm{n}}, \\ H_0 = -\frac{2\pi}{c} \frac{J_{3/2}\Delta z_{3/2}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}} \frac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}, \quad H_2 = -H_4 = -\frac{2\pi}{c} \frac{J_{3/2}\Delta z_{3/2}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, \\ H_6 = \frac{2\pi}{c} \frac{J_{3/2}\Delta z_{3/2}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}} \frac{1 + \beta_{5/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{5/2}\mathrm{n}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Перепишем это решение в более компактной форме:

$$\begin{gathered} E_0 = A_{1/2}\mathcal{E}^J_{3/2}, \quad E_2 = E_4 = \mathcal{E}^J_{3/2}, \quad E_6 = A_{5/2}\mathcal{E}^J_{3/2}, \\ H_0 = A_{1/2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}^J_{3/2}, \quad H_2 = -H_4 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}^J_{3/2}, \quad H_6 = -A_{5/2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}^J_{3/2}. \end{gathered} \tag{23}$$

Физическая интерпретация этих соотношений аналогична формулам (16). Значения поля E_2, H_2 и E_4, H_4 являются граничным условием для волн, распространяющихся соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси z. «Набег фазы» этих волн описывается множителями $A_{1/2}$ и $A_{5/2}$. При этом для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси z, выполняется $H = -\sqrt{\varepsilon/\mu}E$. Для волн, распространяющихся в положительном направлении, знак следует изменить на противоположный: $H = \sqrt{\varepsilon/\mu}E$.

3. Опираясь на (23), нетрудно записать решение для случая, когда сетка содержит произвольное число шагов $N > 3$, но ток отличен от нуля только в шаге n_0: $J_{n_0-1/2} \neq 0$, $J_{n-1/2} = 0$ при $n \neq n_0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&E_{2n_0-2-2q} = \prod_{p=1}^{q} A_{n_0-1/2-p}\mathcal{E}^J_{n_0-1/2}, && H_{2n_0-2-2q} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\prod_{p=1}^{q} A_{n_0-1/2-p}\mathcal{E}^J_{n_0-1/2},\\
&E_{2n_0-2} = \mathcal{E}^J_{n_0-1/2}, && H_{2n_0-2} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}^J_{n_0-1/2},\\
&E_{2n_0} = \mathcal{E}^J_{n_0-1/2}, && H_{2n_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}^J_{n_0-1/2},\\
&E_{2n_0+2q} = \prod_{p=1}^{q} A_{n_0-1/2+p}\mathcal{E}^J_{n_0-1/2}, && H_{2n_0+2q} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\prod_{p=1}^{q} A_{n_0-1/2+p}\mathcal{E}^J_{n_0-1/2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $q \geqslant 1$. Эти формулы следуют из (17), (18) и (20).

4. Если ток присутствует в нескольких ячейках, то нужно просуммировать выражения (24) по индексу n_0. При этом вклад в поле E от всех ячеек с током берется со знаком «+». Вклад в поле H в узлах, расположенных левее выбранной ячейки с током, учитывается со знаком «–», а в узлах, расположенных правее выбранной ячейки – со знаком «+».

В качестве примера приведем решение задачи, в которой сетка содержит четыре интервала, причем объемные токи в средних интервалах отличны от нуля: $J_{3/2} \neq 0$, $J_{5/2} \neq 0$, а в граничных – равны нулю: $J_{1/2} = J_{7/2} = 0$. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned}
E_0 &= A_{1/2}\mathcal{E}^J_{1/2} + A_{1/2}A_{3/2}\mathcal{E}^J_{5/2}, \quad H_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{1/2}\mathcal{E}^J_{1/2} + A_{1/2}A_{3/2}\mathcal{E}^J_{5/2}),\\
E_2 &= \mathcal{E}^J_{3/2} + A_{3/2}\mathcal{E}^J_{5/2}, \quad H_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mathcal{E}^J_{3/2} + A_{3/2}\mathcal{E}^J_{5/2}),\\
E_4 &= \mathcal{E}^J_{3/2} + \mathcal{E}^J_{5/2}, \quad H_4 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mathcal{E}^J_{3/2} - \mathcal{E}^J_{5/2}),\\
E_6 &= A_{5/2}\mathcal{E}^J_{3/2} + \mathcal{E}^J_{5/2}, \quad H_6 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{5/2}\mathcal{E}^J_{3/2} + \mathcal{E}^J_{5/2}),\\
E_8 &= A_{7/2}A_{5/2}\mathcal{E}^J_{3/2} + A_{7/2}\mathcal{E}^J_{5/2}, \quad H_8 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{7/2}A_{5/2}\mathcal{E}^J_{3/2} + A_{7/2}\mathcal{E}^J_{5/2}).
\end{aligned} \tag{25}$$

Оно построено по описанному выше правилу. Можно непосредственно проверить, что это решение удовлетворяет системе

$$\begin{gathered}
\sqrt{\varepsilon}E_0 + \sqrt{\mu}H_0 = 0, \quad E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_2 + H_0) = 0,\\
H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, \quad E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu(H_4 + H_2) = 0,\\
H_4 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon(E_4 + E_2) = \frac{4\pi}{c}J_{3/2}\Delta z_{3/2}, \quad E_6 - E_4 - \beta_{5/2}\mu(H_6 + H_4) = 0,\\
H_6 - H_4 - \beta_{5/2}\varepsilon(E_6 + E_4) = \frac{4\pi}{c}J_{5/2}\Delta z_{5/2}, \quad E_8 - E_6 - \beta_{7/2}\mu(H_8 + H_6) = 0,\\
H_8 - H_6 - \beta_{7/2}\varepsilon(E_8 + E_6) = 0, \quad \sqrt{\varepsilon}E_8 - \sqrt{\mu}H_8 = 0.
\end{gathered} \tag{26}$$

6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ТОКИ

1. Рассмотрим однородную среду $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\varepsilon \neq \mu$. Пусть в плоскости $z = z_1 = \text{const}$ течет внешний (заданный) поверхностный ток j_1, а индуцированные поверхностные токи равны нулю $\sigma^{\text{surf}} = 0$. Пусть сетка содержит $N = 2$ интервала, причем точка z_1 является внутренним узлом. Пусть также волны, падающие из

бесконечности, отсутствуют: $E^0 = E^a = 0$. Запишем систему разностных уравнений для этой задачи

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\varepsilon}E_0 + \sqrt{\mu}H_0 = 0, & E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_1 + H_0) = 0, \\ H_1 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, & H_2 - H_1 = -\dfrac{4\pi}{c} j_1, \\ E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu(H_3 + H_2) = 0, & H_4 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon(E_4 + E_2) = 0, \\ \sqrt{\varepsilon}E_4 - \sqrt{\mu}H_4 = 0. & \end{array} \tag{27}$$

Заметим, что левое предельное значение H_1 в узле z_1 отличается от правого предельного значения H_2. Левое и правое предельные значения электрического поля в этом узле совпадают: $E_1 = E_2$. В узлах z_0, z_2 поля непрерывны.

Решение этой разностной задачи имеет вид

$$\begin{array}{ll} E_0 = -\dfrac{2\pi}{c} j_1 \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \dfrac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}, & H_0 = \dfrac{2\pi}{c} j_1 \dfrac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}}, \\ E_2 = -\dfrac{2\pi}{c} \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} j_1, & H_2 = -H_1 = -\dfrac{2\pi}{c} j_1, \\ E_4 = -\dfrac{2\pi}{c} j_1 \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \dfrac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, & H_4 = -\dfrac{2\pi}{c} j_1 \dfrac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}. \end{array} \tag{28}$$

Это решение подчиняется той же закономерности, что мы видели в предыдущих примерах. Для волны, бегущей в сторону $z = -\infty$, имеем $H = -\sqrt{\varepsilon/\mu}E$. Для волны, бегущей в сторону $z = +\infty$, выполнено $H = \sqrt{\varepsilon/\mu}E$. Поля E_2, H_2 являются граничным условием для волн, распространяющихся в обоих направлениях оси z. При этом смещение от точки расположения источника на один шаг влево приводит к умножению полей на $A_{1/2}$. При смещении вправо поля умножаются на $A_{3/2}$. Логарифмы этих множителей можно трактовать как набеги фаз соответствующих волн. Удобно ввести обозначение

$$\mathcal{E}_1^j = -\frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} j_1. \tag{29}$$

Тогда (28) можно записать в более компактной форме:

$$\begin{array}{ll} E_0 = A_{1/2}\mathcal{E}_1^j, & H_0 = -A_{1/2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_1^j, \\ E_2 = \mathcal{E}_1^j, & H_2 = -H_1 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_1^j, \\ E_4 = A_{3/2}\mathcal{E}_1^j, & H_4 = A_{3/2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_1^j. \end{array} \tag{30}$$

2. Рассмотрим теперь задачу на сетке, содержащей $N = 4$ интервала. Пусть поверхностный ток j_2 присутствует в узле z_2, а в прочих узлах равен нулю: $j_n = 0$, $n = 0, 1, 3, 4$. Разностная схема имеет вид

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\varepsilon}E_0 + \sqrt{\mu}H_0 = 0, & E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_2 + H_0) = 0, \\ H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, & E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu(H_3 + H_2) = 0, \\ H_3 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon(E_4 + E_2) = 0, & H_4 - H_3 = -\dfrac{4\pi}{c} j_2, \\ E_6 - E_4 - \beta_{5/2}\mu(H_6 + H_4) = 0, & H_6 - H_4 - \beta_{5/2}\varepsilon(E_6 + E_4) = 0, \\ E_8 - E_6 - \beta_{7/2}\mu(H_8 + H_6) = 0, & H_8 - H_6 - \beta_{7/2}\varepsilon(E_8 + E_6) = 0, \\ \sqrt{\varepsilon}E_8 - \sqrt{\mu}H_8 = 0. & \end{array} \tag{31}$$

Приведем решение этой задачи

$$\begin{array}{ll} E_0 = -\dfrac{2\pi}{c} j_2 \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \dfrac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}} \dfrac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, & H_0 = \dfrac{2\pi}{c} j_1 \dfrac{1 + \beta_{1/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{1/2}\mathrm{n}} \dfrac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, \\ E_2 = -\dfrac{2\pi}{c} \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} j_2 \dfrac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, & H_2 = \dfrac{2\pi}{c} j_2 \dfrac{1 + \beta_{3/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{3/2}\mathrm{n}}, \\ E_4 = -\dfrac{2\pi}{c} j_1 \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}, & H_4 = -H_3 = -\dfrac{2\pi}{c} j_1, \\ E_6 = -\dfrac{2\pi}{c} \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} j_2 \dfrac{1 + \beta_{5/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{5/2}\mathrm{n}}, & H_6 = -\dfrac{2\pi}{c} j_2 \dfrac{1 + \beta_{5/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{5/2}\mathrm{n}}, \\ E_8 = -\dfrac{2\pi}{c} \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} j_2 \dfrac{1 + \beta_{5/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{5/2}\mathrm{n}} \dfrac{1 + \beta_{7/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{7/2}\mathrm{n}}, & H_8 = -\dfrac{2\pi}{c} j_2 \dfrac{1 + \beta_{5/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{5/2}\mathrm{n}} \dfrac{1 + \beta_{7/2}\mathrm{n}}{1 - \beta_{7/2}\mathrm{n}}, \end{array} \tag{32}$$

или в более компактной форме:

$$
\begin{aligned}
&E_0 = A_{1/2}A_{3/2}\mathcal{E}_2^j, && H_0 = -A_{1/2}A_{3/2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_2^j,\\
&E_2 = A_{3/2}\mathcal{E}_2^j, && H_2 = -A_{3/2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_2^j,\\
&E_4 = \mathcal{E}_2^j, && H_4 = -H_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_2^j,\\
&E_6 = A_{5/2}\mathcal{E}_2^j, && H_6 = A_{5/2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_2^j,\\
&E_8 = A_{5/2}A_{7/2}\mathcal{E}_2^j, && H_8 = A_{5/2}A_{7/2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_2^j.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

В этом решении видны те же закономерности, что и в предыдущих примерах. Удаление узла на один шаг от точки расположения источника эквивалентно умножению поля на множитель A с индексом, равным номеру соответствующего шага. В точках, для которых координата z больше, чем z-координата источника, электрическое и магнитное поля связаны соотношением $H = \sqrt{\varepsilon/\mu}E$. В точках с z-координатой меньшей, чем z-координата источника, знак в последнем соотношении нужно изменить на противоположный $H = -\sqrt{\varepsilon/\mu}E$.

3. Пользуясь решениями (30) и (17), (18), нетрудно составить решение задачи, в которой сетка является произвольной неравномерной, и поверхностный ток присутствует только в узле n_0. Оно имеет вид

$$
\begin{aligned}
&E_{2n_0-2-2q} = \prod\nolimits_{p=1}^q A_{n_0-1/2-p}\mathcal{E}_{n_0}^j, && H_{2n_0-2-2q} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\prod\nolimits_{p=1}^q A_{n_0-1/2-p}\mathcal{E}_{n_0}^j,\\
&E_{2n_0} = \mathcal{E}_{n_0}^j, && H_{2n_0} = -H_{2n_0-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{E}_{n_0}^j,\\
&E_{2n_0+2q} = \prod\nolimits_{p=1}^q A_{n_0-1/2+p}\mathcal{E}_{n_0}^j, && H_{2n_0+2q} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\prod\nolimits_{p=1}^q A_{n_0-1/2+p}\mathcal{E}_{n_0}^j.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Здесь индекс q принимает значения $q \geqslant 1$.

4. Если поверхностные токи текут по нескольким плоскостям $\{z_{n_0}\}$, то необходимо взять сумму по n_0 выражений вида (34).

В качестве примера приведем решение задачи, в которой сетка содержит три интервала, причем во внутренних узлах $z = z_1$ и $z = z_2$ расположены плоскости с поверхностными токами j_1 и j_2 соответственно. Это решение выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&E_0 = A_{1/2}\mathcal{E}_1^j + A_{1/2}A_{3/2}\mathcal{E}_2^j, && E_2 = \mathcal{E}_1^j + A_{3/2}\mathcal{E}_2^j,\\
&E_4 = A_{3/2}\mathcal{E}_1^j + \mathcal{E}_2^j, && E_6 = A_{3/2}A_{5/2}\mathcal{E}_1^j + A_{5/2}\mathcal{E}_2^j,\\
&H_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{1/2}\mathcal{E}_1^j + A_{1/2}A_{3/2}\mathcal{E}_2^j), && H_1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mathcal{E}_1^j + A_{3/2}\mathcal{E}_2^j),\\
&H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mathcal{E}_1^j - A_{3/2}\mathcal{E}_2^j), && H_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{3/2}\mathcal{E}_1^j - \mathcal{E}_2^j),\\
&H_4 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{3/2}\mathcal{E}_1^j + \mathcal{E}_2^j), && H_6 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A_{3/2}A_{5/2}\mathcal{E}_1^j + A_{5/2}\mathcal{E}_2^j).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что это решение удовлетворяет разностной задаче

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\varepsilon}E_0 + \sqrt{\mu}H_0 = 0, && E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu(H_1 + H_0) = 0,\\
&H_1 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon(E_2 + E_0) = 0, && H_2 - H_1 = -\frac{4\pi}{c}j_1,\\
&E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu(H_3 + H_2) = 0, && H_3 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon(E_4 + E_2) = 0,\\
&H_4 - H_3 = -\frac{4\pi}{c}j_2, && E_6 - E_4 - \beta_{5/2}\mu(H_6 + H_4) = 0,\\
&H_6 - H_4 - \beta_{5/2}\varepsilon(E_6 + E_4) = 0, && \sqrt{\varepsilon}E_6 - \sqrt{\mu}H_6 = 0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

7. СУПЕРПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЙ

В общем случае поле может возбуждаться волнами $E^0 \neq 0$, $E^a \neq 0$, приходящими из $z = -\infty$ и $z = +\infty$, объемными $\{J_{n_0-1/2}\}$ и поверхностными $\{j_{n_0}\}$ токами. Тогда точное решение системы разностных уравнений представляется суммой выражений (17), (18), (24), (34), причем две последних формулы суммируются по индексам n_0, соответствующим ненулевым токам.

8. КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

1. Пусть материальные параметры являются кусочно-постоянными функциями координаты, и пусть число слоев среды невелико по сравнению с числом шагов сетки. Пусть координаты слоев ξ_q соответствуют узлам сетки с номерами n_q.

Пусть объемные токи отсутствуют, а источником поля являются граничные условия. Тогда решение в каждом слое среды нужно представить в виде суперпозиции сеточных волн «слева направо» и «справа налево» с некоторыми коэффициентами C_q, D_q. Так, в q-м слое имеем

$$E_{2n} = C_q \prod_{k=n_{q-1}+1}^{n} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q} + D_q \prod_{k=n}^{n_q-1} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}, \tag{37}$$

$$H_{2n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_q}{\mu_q}} \left[C_q \prod_{k=n_{q-1}+1}^{n} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q} - D_q \prod_{k=n}^{n_q-1} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q} \right]. \tag{38}$$

Коэффициенты C_q, D_q суть амплитуды волн, падающих на q-й слой слева и справа соответственно. Индекс n пробегает значения $n_{q-1} \le n \le n_q$. В частности, если $n = n_{q-1}$, то первое произведение в (37), (38) полагается равным единице; если $n = n_q$, то второе произведение равно единице. Материальные параметры ε_q, μ_q, $\mathrm{n}_q = \sqrt{\varepsilon_q\mu_q}$ относятся к q-му слою.

Коэффициенты C_q, D_q определяются подстановкой (37), (38) в условия излучения на границах расчетной области и в условия сопряжения на границах раздела сред. Приведем соответствующую систему уравнений

$$C_0 = E^0, \quad D_Q = E^a, \tag{39}$$

$$C_q \prod_{k=n_{q-1}+1}^{n_q} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q} + D_q = C_{q+1} + D_{q+1} \prod_{k=n_q}^{n_{q+1}-1} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_{q+1}}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_{q+1}}, \tag{40}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_q}{\mu_q}} \left[C_q \prod_{k=n_{q-1}+1}^{n_q} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_q} - D_q \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_{q+1}}{\mu_{q+1}}} \left[C_{q+1} - D_{q+1} \prod_{k=n_q}^{n_{q+1}-1} \frac{1+\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_{q+1}}{1-\beta_{k-1/2}\mathrm{n}_{q+1}} \right]. \tag{41}$$

В (40), (41) индекс q принимает значения $1 \le q \le Q-1$. Решить эту систему в конечном виде не удается. Однако ее порядок $2Q$ существенно ниже, чем у исходной системы разностных уравнений $2N+2$. Это существенно снижает трудоемкость вычислений. Такой алгоритм напоминает известный метод матриц переноса (см. [7]).

2. Если объемные и поверхностные токи отличны от нуля, то они также создают волны, распространяющиеся в обоих направлениях координатной оси. Когда волна «слева направо» достигает границы раздела, она отражается и формирует волну «справа налево» (с некоторым коэффициентом) и наоборот. Значит, в каждом слое среды к решениям из разделов 5 и 6 нужно прибавить линейную комбинацию сеточных волн с некоторыми коэффициентами. Далее полученные решения подставляются в граничные условия и условия сопряжения на границах раздела сред, аналогично описанному выше.

3. Приведем пример. Пусть сетка состоит из $N = 2$ ячеек $\Delta z_{1/2}$, $\Delta z_{3/2}$. В точке $\xi = z_1 = \Delta z_{1/2}$ расположена граница раздела. При $z < z_1$ материальные параметры равны $\varepsilon_{1/2}$, $\mu_{1/2}$; при $z > z_1$ – $\varepsilon_{3/2}$, $\mu_{3/2}$.

Запишем разностную схему

$$\begin{aligned} &\sqrt{\mu_{1/2}}H_0 + \sqrt{\varepsilon_{1/2}}E_0 = 2\sqrt{\varepsilon_{1/2}}E^0, \quad E_2 - E_0 - \beta_{1/2}\mu_{1/2}(H_2 + H_0) = 0, \\ &H_2 - H_0 - \beta_{1/2}\varepsilon_{1/2}(E_2 + E_0) = 0, \quad E_4 - E_2 - \beta_{3/2}\mu_{3/2}(H_4 + H_2) = 0, \\ &H_4 - H_2 - \beta_{3/2}\varepsilon_{3/2}(E_4 + E_2) = 0, \quad \sqrt{\mu_{3/2}}H_4 - \sqrt{\varepsilon_{3/2}}E_4 = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Представим решение согласно (37), (38)

$$E_0 = C_1 + D_1\frac{1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}{1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{1/2}}{\mu_{1/2}}}\left[C_1 + D_1\frac{1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}{1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}\right], \tag{43}$$

$$E_2 = C_1\frac{1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}{1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}} + D_1, \quad H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{1/2}}{\mu_{1/2}}}\left[C_1\frac{1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}{1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}} + D_1\right], \tag{44}$$

$$E_2 = C_2 + D_2\frac{1+\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}}{1-\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}}, \quad H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{3/2}}{\mu_{3/2}}}\left[C_2 + D_2\frac{1+\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}}{1-\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}}\right], \tag{45}$$

$$E_4 = C_2\frac{1+\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}}{1-\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}} + D_2, \quad H_4 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{1/2}}{\mu_{1/2}}}\left[C_2\frac{1+\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}}{1-\beta_{3/2}\mathrm{n}_{3/2}} + D_2\right]. \tag{46}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что решение вида (43)–(46) тождественно удовлетворяет системе (42). Остается определить коэффициенты.

Из (39) следует, что $C_1 = E^0$, $D_2 = 0$. Согласно (40), (41), приравняем значения E_2 из (44) и (45). Аналогично приравняем H_2 из (44) и (45). Получим систему уравнений относительно коэффициентов D_1 и C_2. Ее решение имеет вид

$$D_1 = RE^0\frac{1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}{1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}, \quad C_2 = (1+R)E^0\frac{1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}}{1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2}},$$
$$R \equiv \frac{\sqrt{\varepsilon_{1/2}/\mu_{1/2}} - \sqrt{\varepsilon_{3/2}/\mu_{3/2}}}{\sqrt{\varepsilon_{1/2}/\mu_{1/2}} + \sqrt{\varepsilon_{3/2}/\mu_{3/2}}}. \tag{47}$$

Полученные выражения имеют простую физическую интерпретацию. Величина $E^0(1+\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2})(1-\beta_{1/2}\mathrm{n}_{1/2})$ есть амплитуда сеточной волны непосредственно на границе раздела. Множитель R равен хорошо известному коэффициенту отражения от плоской границы раздела сред при нормальном падении (см. [8]). В частности, отсюда следует, что в бикомпактной схеме (5)–(8) сеточный закон сохранения энергии при прохождении через слоистую среду выполняется точно (в пределах ошибок округления). Это подтверждается численными расчетами конкретных примеров (см. [3]).

9. НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. В этом случае внешние объемные и поверхностные токи являются импульсами по времени. На рассеиватель из обоих направлений оси z падают волновые пакеты с заданными огибающими $E^{0,a}$ и несущей частотой ω^0:

$$f^0(\zeta) = E^0(\zeta)e^{-i\omega^0\zeta}, \ \zeta = t - z/c; \quad f^a(\chi) = E^a(\chi)e^{-i\omega^0\chi}, \ \chi = t + z/c. \tag{48}$$

Поле не является монохроматическим, а содержит спектр частот.

2. Для такой задачи в [2] нами ранее был предложен метод спектрального разложения. Выполним численно преобразование Фурье падающих волновых пакетов, объемных и поверхностных токов по формуле трапеций на одинаковых сетках по времени и по частоте $\{\omega_m\}$, $\omega_{m+1} - \omega_m = \Delta\omega_m$.

Для каждой частоты получим свои амплитуды компонент падающих волновых пакетов $E_m^{0,a}$ и источников поля $(J_q)_m$, $(j_q)_m$. Решим с помощью бикомпактной схемы набор стационарных задач, каждая из которых соответствует своей частоте ω_m. Для этого целесообразно использовать построенное выше явное решение. Наконец, просуммируем полученные спектральные амплитуды решения по всем частотам ω_m.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенное решение является новым. Для однородных сред оно записывается по явным формулам (в указанных выше формулах поля выражены друг через друга только для компактности записи). В случае кусочно-однородных сред для определения коэффициентов нужно решить систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой существенно ниже порядка исходной сеточной системы. При этом сетка $\{\Delta z_{n-1/2}\}$ может быть произвольно неравномерной. Конфигурация объемных и поверхностных токов также может быть произвольной.

Трудоемкость предлагаемого решения эквивалентна таковой для метода матриц переноса. При этом рассматриваемый круг задач существенно шире, поскольку матричные методы не применимы к задачам со сторонними источниками поля и поверхностными токами.

Предлагаемое решение намного экономичнее прямого решения сеточной системы. Оно особенно эффективно, если число Q слоев рассеивателя существенно меньше числа N шагов сетки. По мере увеличения Q размерность системы (39)–(41) растет. В частности, для градиентных сред с плавным изменением показателя преломления толщины слоев соответствуют одному шагу сетки, и система (39)–(41) становится эквивалентна исходной разностной схеме (5)–(8). В этом случае целесообразно решать непосредственно исходную разностную задачу.

Авторы искренне благодарны Л. А. Севастьянову за ценные замечания и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов А.А., Домбровская Ж.О.* Прецизионные методы решения одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 51–65.

2. *Белов А.А., Домбровская Ж.О.* Бикомпактная разностная схема для уравнений Максвелла в слоистых средах // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 15–19.

3. *Белов А.А., Домбровская Ж.О.* Тестирование бикомпактных схем для одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 1532–1550.

4. *Yee K.* Numerical solution of inital boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas. Propag. 1966. Т. 14. № 3. С. 302–307.

5. *Калиткин Н.Н., Царева Л.С.* Некоторые точные решения разностных схем. Отчет Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1967.

6. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.

7. *Macleod H.A.* Thin-film optical filters. Fourth edition. Taylor and Francis. Boca Raton, London New York, 2010.

8. *Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. М.: Изд-во МГУ, 2004.

EXACT SOLUTION OF A BICOMPACT DIFFERENCE SCHEME FOR THE SYSTEM OF MAXWELL EQUATIONS

A. A. Belov[a,*], Zh. O. Dombrovskaya[a,]**

[a] *RUDN, ul. Miklukho-Maklaya 6, 117198 Moscow, Russia*
**e-mail: aa.belov@physics.msu.ru*
***e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru*

Received May 10, 2024
Revised October 18, 2024
Accepted November 8, 2024

Abstract. One-dimensional problems for the system of Maxwell equations cover a wide range of important applied problems. Among them are problems of photonics, plasmonics, microwave technology, etc. For such problems, we previously proposed a bicompact (two-point completely conservative) difference scheme. An exact solution to the corresponding system of grid equations is constructed. It is applicable to problems in piecewise homogeneous media with an arbitrary configuration of volume and surface currents. The constructed solution makes it possible to dramatically reduce the labor intensity of calculating such problems.

Keywords: Maxwell equations, layered media, bicompact medium schemes