УДК 519.635

ВОЗМОЖНОСТИ ЗОНДИРОВАНИЙ НА КОНЕЧНОМ НАБОРЕ ЧАСТОТ

© 2025 г. А.С. Барашков[1,*]

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ МЭИ, Россия

**e-mail: BarashkovAS@mpei.ru*

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

Переработанный вариант 01.11.2024 г.

Принята к публикации 08.11.2024 г.

Рассмотрена двумерная среда, в которой поля описываются уравнением Гельмгольца. Изучена линеаризованная постановка задачи, которая в итоге сводится к восстановлению неизвестной правой части неоднородного уравнения Гельмгольца в бесконечной полосе. Указанная правая часть в данной работе берется в виде суммы дельта-функций, которые можно интерпретировать как суммарные проводимости тонких слоев. В качестве информации для решения обратной задачи используются значения решения уравнения Гельмгольца и нормальной производной решения на границе полосы для нескольких значений параметра в уравнении Гельмгольца. Эти данные можно интерпретировать как значения напряженностей электрического и магнитного полей на границе полосы для конечного набора частот. С помощью разложения в ряды Фурье получено интегральное уравнение, связывающее искомые величины с данными для решения обратной задачи. При использовании преобразования Фурье установлены условия однозначности решения обратной задачи. Наряду с этим даны примеры многозначности решения обратной задачи в неожиданных ситуациях. Библ. 12.

Ключевые слова: двумерная среда, тонкие слои, бесконечная полоса, обратная задача для уравнения Гельмгольца, теоремы единственности, примеры неоднозначности решения при восстановлении среды.

DOI: 10.31857/S0044466925020048, **EDN**: CBQPDP

1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа является продолжением статьи [1]. В той статье разобран случай двухслойной среды. Теперь удалось получить исчерпывающие результаты для n-слойной среды, $n \geqslant 1$, в том числе уточнить результаты для $n = 2$.

Рассматривается уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \mu\sigma(x, y)u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\sigma(x, y)u = 0, \tag{1}$$

в бесконечной полосе $D = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$.

Пусть решение $u(x, y, \mu)$ уравнения (1) удовлетворяет граничным условиям

$$u(x, y = 1, \mu) = 0; \frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, \mu) = -1. \tag{2}$$

Пусть параметр μи коэффициент $\sigma(x, y)$ из (1) таковы, что решение граничной задачи (1), (2) – функция $u(x, y, \mu)$ — существует и единственно. Точные условия на μ и σ будут указаны ниже.

Определение 1. Прямой задачей для уравнения (1) при условиях (2) назовем задачу нахождения функции

$$\phi(x, \mu) = u(x, y = 0, \mu). \tag{3}$$

Определение 2. Обратной задачей для уравнения (1) при условиях (2) назовем задачу определения коэффициента $\sigma(x, y)$ по функции $\phi(x, \mu)$ из (3).

В приложениях, например в электроразведке [2], коэффициент $\sigma(x, y)$ из (1) характеризует строение Земли, параметр μ имеет смысл частоты зондирования, функции $u(x, y = 0, \mu)$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, \mu)$ выражаются через значения напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности среды.

В настоящей работе рассматривается ситуация, когда функция $\phi(x, \mu)$ из (3) известна для конечного набора частот μ: $\mu \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$. Такое исследование имеет смысл не только для тех случаев, когда функция $\phi(x, \mu)$

измеряется на конечном наборе частот. Пусть функция $\phi(x,\mu)$ известна для всех μ на некотором отрезке, но ее можно аппроксимировать в пределах точности измерений по значениям $\phi(x,\mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Понятно, что эти k функций одной переменной x несут такую же информацию о коэффициенте $\sigma(x,y)$, что и вся функция $\phi(x,\mu)$ двух переменных.

Обратную задачу будем решать в линейном приближении. Процедура линеаризации заключается в следующем (см. [3], [1]).

Предполагаем, что коэффициент $\sigma(x,y) = \sigma_0 + \gamma(x,y)$, где $\left\|\gamma(x,y)\right\| << \|\sigma_0\|$. Введем в систему (1), (2) новый параметр ε и разложим решение $u(x,y,\mu,\varepsilon)$в ряд по этому параметру: $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$

$$\Delta u + \mu(\sigma_0 + \varepsilon\gamma(x,y))u = 0,$$

$$\varepsilon^0 : \Delta u_0 + \mu\sigma_0 u_0 = 0, \quad u_0|_{y=1} = 0; \quad \left.\frac{du_0}{dy}\right|_{y=0} = -1;$$

$$\varepsilon^1 : \Delta u_1 + \mu\sigma_0 u_1 = -\mu u_0\gamma(x,y), \quad u_1|_{y=1} = 0; \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0;$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon^n : \Delta u_n + \mu\sigma_0 u_n = -\mu u_{n-1}\gamma(x,y), \quad u_n|_{y=1} = 0; \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

Удержим в разложении два слагаемых: $u \approx u_0 + \varepsilon u_1$, при этом ε считаем равным 1. Для сокращения записей обозначим $w = u_0$, $v = u_1$. Тогда $u = w + v$, где

$$\frac{d^2 w}{dy^2} + \mu\sigma_0 w = 0, \quad w|_{y=1} = 0; \quad \left.\frac{dw}{dy}\right|_{y=0} = -1, \tag{4}$$

$$\Delta v + \mu\sigma_0 v = -\mu w(y,\mu)\gamma(x,y), \quad v|_{y=1} = 0; \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{5}$$

По аналогии с определениями 1 и 2 назовем прямой задачей для системы (4), (5) нахождение функции $\psi(x,\mu) = u(x, y = 0, \mu)$, а обратной задачей — определение коэффициента $\gamma(x,y)$ из (5) по функции $\psi(x,\mu)$.

2. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Конкретизируем вид коэффициента $\gamma(x,y)$ из (5):

$$\gamma(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\delta(y - b_i), \tag{6}$$

где $\alpha_i(x)$ — ограниченные, бесконечно дифференцируемые функции, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака ($\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$) (см. [4]).

Коэффициент (6) моделирует ситуацию, когда на глубинах b_i лежат тонкие слои с суммарной проводимостью $\alpha_i(x)$. Альтернативой “тонкому” слою служит “мощный” слой [5]. В этом случае слой характеризуется двумя границами $b_i^- < y < b_i^+$ и проводимостью $\gamma(x,y) = \tau_i(x)$. Суммарная проводимость $\alpha_i(x) = (b_i^+ - b_i^-)\tau_i(x)$.

Замечание 1. Понятие тонкого слоя возникло в геоэлектрике вынужденно – для тех случаев, когда точности измерений не хватает для определения толщины слоя.

Сравнительно недавно появился новый объект – двумерные материалы – структуры, в которых есть пленки толщиной в один атом (графен, борофен и многие другие) [6], [7]. Модель с тонкими слоями описывает поля и в таких структурах. Нам будет удобней запись уравнения (5), которая явно не содержит дельта-функции.При этом примем, что параметр $\mu = -\eta$, где $\eta > 0$. Кроме этого учтем, что функция w из (4) не зависит от переменной x и выражается формулой

$$w(y,\eta) = \frac{sh(\sqrt{\sigma_0\eta}(1-y))}{\sqrt{\sigma_0\eta}ch(\sqrt{\sigma_0\eta})},$$

$$\Delta v - \eta\sigma_0 v = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$v|_{y=1} = 0, \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad [v]\,|_{y=b_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]|_{y=b_i} = \eta w(b_i,\eta)\alpha_i(x).$$

Для сокращения записей уберем из правых частей условий сопряжений на внутренних границах b_i постоянный множитель $\frac{\eta}{\sqrt{\sigma_0\eta}ch(\sqrt{\sigma_0\eta})}$. Тогда задача запишется в следующем виде:

$$\Delta v - \eta\sigma_0 v = 0, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$v|_{y=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad [v]\,\big|_{y=b_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]\Big|_{y=b_i} = sh(\sqrt{\sigma_0\eta}(1-b_i))\alpha_i(x). \tag{7}$$

Сформулируем для задачи (7) теорему существования и единственности решения $v(x, y, \eta)$ [8], [9].

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *— ограниченные, бесконечно дифференцируемые функции с ограниченными производными. Пусть* $0 < b_1 < \ldots < b_n < 1$. *Тогда при каждом* $\eta \geqslant 0$ *ограниченное решение задачи* (7) *существует и единственно. При этом решение* $v(x, y, \eta)$*является непрерывной функцией в области* $\bar{D} = \{(x, y)\colon -\infty < x < \infty, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ *и бесконечно дифференцируемой функцией в областях* $\bar{D}_1 = \{(x, y)\colon -\infty < x < \infty, 0 \leqslant y \leqslant b_1\}$, $\bar{D}_i = \{(x, y)\colon -\infty < x < \infty, b_{i-1} \leqslant y \leqslant b_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\bar{D}_{n+1} = \{(x, y)\colon -\infty < x < \infty, b_n \leqslant y \leqslant 1\}$.

Определение 3. Прямой задачей для системы (7) назовем задачу определения функций

$$\psi(x, \eta) = v(x, y = 0, \eta). \tag{8}$$

При этом коэффициент (число) σ_0, функции $\alpha_i(x)$, числа $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$, из (7) считаются известными.

Замечание 2. Функции ϕ, ψ из определений 1, 3 связаны соотношениями

$$\phi(x, -\eta) = \frac{sh(\sqrt{\sigma_0\eta})}{\sqrt{\sigma_0\eta}ch(\sqrt{\sigma_0\eta})} + \frac{\eta\psi(x, \eta)}{\sqrt{\sigma_0\eta}ch(\sqrt{\sigma_0\eta})},$$

т.е. легко пересчитываются одна в другую (величины σ_0, η считаются известными).

Из теоремы 1 следует, что функция $\psi(x, \eta)$ из (8) является бесконечно дифференцируемой функцией переменной x.

Решение прямой задачи для системы (7) получено в работе [1]. Приводим его:

$$\psi(x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} K(x - t, b_j, \eta)\alpha_j(t)dt, \tag{9}$$

где

$$K(x, b, \eta) = -sh((1-b)\sqrt{\eta\sigma_0}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n b)\exp(-\sqrt{\lambda_n^2 + \eta\sigma_0}\,|x|)}{\sqrt{\lambda_n^2 + \eta\sigma_0}}, \quad \lambda_n = \pi/2 + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Определение 4. Обратной задачей № 1 для системы (7) назовем задачу нахождения функций $\alpha_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, по функциям $\psi(x, \eta = \eta_l)$, $l = 1, 2, \ldots, N$, из (8). При этом числа b_j (глубины залегания слоев) считаются известными.

Следуя [1], ищем решение обратной задачи в классе функций $\tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty, \infty)$ — функции вида: $\alpha(x) = \beta(x) + T(x)$, где $\beta(x)$ — бесконечно дифференцируемая, ограниченная вместе с производными функция, принадлежащая $L_1(-\infty, \infty)$, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(x)| dx < \infty$, а $T(x)$ — тригонометрический многочлен: $T(x) = \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos\omega_k x + b_k \sin\omega_k x)$. Применим к системе (9) преобразование Фурье (см. [10], [1]). Образы Фурье функций $\alpha_j(x)$,$K(x, b_j, \eta)$,$\psi(x, \eta = \eta_l)$ — функции $\mathrm{A}_j(\omega)$, $\tilde{K}(\omega, b_j, \eta_l)$, $\Phi(\omega, \eta = \eta_l)$ связаны соотношениями

$$\sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \tilde{K}(\omega, b_j, \eta_l)\mathrm{A}_j(\omega) = \Phi(\omega, \eta_l), \tag{10}$$

где

$$\tilde{K}(\omega, b_j, \eta_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, b_j, \eta_l)e^{-i\omega x}dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} sh((1-b_j)\sqrt{\eta_l\sigma_0}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n b_j)}{\lambda_n^2 + \eta_l\sigma_0 + \omega^2} =$$
$$= \frac{-sh((1-b_j)\sqrt{\eta_l\sigma_0})}{\sqrt{2\pi}} \frac{sh((1-b_j)\sqrt{\omega^2 + \eta_l\sigma_0})}{\sqrt{\omega^2 + \eta_l\sigma_0} ch\sqrt{\omega^2 + \eta_l\sigma_0}}$$

(образ Фурье функции $K(x, b_j, \eta_l)$ вычислен в [1]).

В первую очередь рассмотрим случай $n = N$ (количество частот совпадает с числом слоев среды). Теорема единственности для обратной задачи № 1 зависит от определителя системы (10):

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \tilde{K}(\omega,\eta_1,b_1) & \tilde{K}(\omega,\eta_1,b_2) & \cdots & \tilde{K}(\omega,\eta_1,b_n) \\ \tilde{K}(\omega,\eta_2,b_1) & \tilde{K}(\omega,\eta_2,b_2) & \cdots & \tilde{K}(\omega,\eta_2,b_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{K}(\omega,\eta_n,b_1) & \tilde{K}(\omega,\eta_n,b_2) & \cdots & \tilde{K}(\omega,\eta_n,b_n) \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Если определитель (11) $\Lambda \neq 0$ при всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ и всех допустимых наборах η_l, b_j, то теорема единственности справедлива (см. [11]). Для выяснения указанного условия потребуются некоторые факты математического анализа. Приведем эти факты, следуя книге [12].

Утверждение 1 (см. [12], отдел 5, гл. 1, примеры 3.85 и 3.4). *Пусть целая функция $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ (т.е. радиус сходимости степенного ряда $\rho = \infty$) задается необрывающимся степенным рядом с неотрицательными коэффициентами a_k. Пусть $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные вещественные числа, не все равные нулю. Тогда функция $F(x) = b_1f(\beta_1x) + b_2f(\beta_2x) + \ldots + b_nf(\beta_nx)$ имеет не больше положительных корней, чем число перемен знаков в последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Замечание 3. Из утверждения следует, что при любых b_k функция $F(x)$ имеет не более $n - 1$ положительных корней.

Утверждение 2 (см. [12], отдел 5, гл. 1, пример 3.38). *Пусть коэффициенты в разложении целой функции $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ вещественны, причем не все a_kравны нулю. Тогда число положительных корней функции $f(x)$ не превосходит числа перемен знаков в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$*

Рассмотрим вспомогательный определитель, аналогичный Λ из (11).

Теорема 2. *Определитель $\Delta = \left| sh(\sqrt{\eta_k\sigma_0}d_l) \cdot sh(\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2}d_l) \right| \neq 0$ при $\omega \in (-\infty, \infty)$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n$, $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_n < 1$, $\sigma_0 > 0$.*

Доказательство (от противного). Пусть определитель $\Delta = 0$. Тогда строки матрицы, которой соответствует определитель Δ, линейно зависимы. Следовательно, есть коэффициенты a_k, не все равные нулю, для которых функция $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k sh(\sqrt{\eta_k\sigma_0}x) \cdot sh(\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2}x)$ имеет n корней $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Преобразуем функцию $F(x)$, используя формулу $shx \cdot shy = \frac{1}{2}(ch(x + y) - ch(x - y))$:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} a_k (ch((\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2} + \sqrt{\eta_k\sigma_0})x) - ch((\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2} - \sqrt{\eta_k\sigma_0})x)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2}(ch((\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2} + \sqrt{\eta_k\sigma_0})x) - ch(\frac{\omega^2 x}{\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2} + \sqrt{\eta_k\sigma_0}})) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2}(ch(\omega\alpha_k x) - ch(\frac{\omega x}{\alpha_k})), \tag{12}$$

где $\alpha_k = \frac{\sqrt{\eta_k\sigma_0 + \omega^2} + \sqrt{\eta_k\sigma_0}}{|\omega|}$ и, очевидно, $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Запишем разложение функции $F(x)$ из (12) в степенной ряд:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{\omega^{2m}\alpha_k^{2m}x^{2m}}{(2m)!} - \frac{\omega^{2m}x^{2m}}{\alpha_k^{2m}(2m)!}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^{2m}x^{2m}}{(2m)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2}(\alpha_k^{2m} - \frac{1}{\alpha_k^{2m}}) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^{2m}x^{2m}}{(2m)!} (\sum_{k=1}^{n} a_k sh(\xi_k m)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\omega x)^{2m}}{(2m)!} b(m),$$

где $\xi_k = \ln\alpha_k^2$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$, $b(m) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k sh(\xi_k m)$.

Согласно утверждению 1, функция $b(z)$ имеет не более $n - 1$ положительных корней. Следовательно, последовательность $\frac{b(m)}{(2m)!}$ может иметь не более $n - 1$ перемен знака. По утверждению 2 отсюда следует, что функция $F(x)$ может иметь не более $n - 1$ положительных корней. Получено противоречие с существованием n корней $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Приведенное доказательство не включает случай $\omega = 0$. Для этого случая нужно применить формулу $sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1)$, и достаточно будет только утверждения 1. Функция $F(x)$ на этот раз удовлетворяет условию утверждения 1 и не может иметь более $n - 1$ положительных корней. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (теорема единственности и условие неединственности решения обратной задачи № 1). *Пусть $\alpha_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, из* (7) *принадлежат $\tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty, \infty)$. Пусть $\psi(x, \eta_l)$, $l = 1, 2, \ldots, N$, из* (8) *соответствуют этим $\alpha_k(x)$. Тогда при $N \geqslant n$ обратная задача* № 1 *для указанных $\psi(x, \eta_l)$ имеет единственное решение. При $N < n$ обратная задача* № 1 *для этих $\psi(x, \eta_l)$ имеет более одного решения.*

Доказательство. Рассматриваем сначала случай $N = n$. Строки матрицы, соответствующей определителю (11), отличаются от строк матрицы, соответствующей определителю из теоремы 2, на постоянные множители (при этом нужно положить $d_k = 1 - b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Следовательно, определитель из (11) не равен нулю. Стало быть, система (10) имеет единственное решение $\mathrm{A}_k(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. По функциям $\mathrm{A}_k(\omega)$ единственным образом находятся функции $\alpha_k(x) \in \tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty, \infty)$. Для $N > n$ можно взять подсистему функций $\psi(x, \eta_l)$, содержащую n функций. Для этой подсистемы имеем уже рассмотренный случай, т.е. $\alpha_k(x)$ находятся однозначно. Для $N < n$ перепишем систему (10) в виде

$$\sqrt{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\tilde{K}(\omega, b_i, \eta_l)\mathrm{A}_i(\omega) = \Phi(\omega, \eta_l) - \sqrt{2\pi}\sum_{i=N+1}^{n}\tilde{K}(\omega, b_i, \eta_l)\mathrm{A}_i(\omega), \quad l = 1, 2, \ldots, N. \tag{13}$$

Определитель матрицы коэффициентов левой части (13) по теореме 2 не равен нулю. Поэтому для любых $\mathrm{A}_i(\omega)$, $i = N+1, N+2, \ldots, n$, система имеет решение относительно $\mathrm{A}_i(\omega)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Возьмем два набора $\mathrm{A}_i(\omega)$, $i = N+1, N+2, \ldots, n$:

$$\mathrm{A}_i^{(1)}(\omega) = \mathrm{A}_i^{(2)}(\omega) = \mathrm{A}_i(\omega), \quad i = N+1, N+2, \ldots, n-1, \quad \mathrm{A}_n^{(1)}(\omega) = \mathrm{A}_n(\omega), \quad \mathrm{A}_n^{(2)}(\omega) = \mathrm{A}_n(\omega) + \delta(\omega - \omega_0)) + \delta(\omega + \omega_0),$$

где $\mathrm{A}_i(\omega)$ — образы исходных $\alpha_i(x)$ из условия теоремы, ω_0 — любое положительное число.

В результате имеем два решения обратной задачи № 1: исходные функции $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ и функции вида

$$\alpha_1(x) + b_1\cos\omega_0 x, \quad \alpha_2(x) + b_2\cos\omega_0 x, \ldots, \quad \alpha_N(x) + b_N\cos\omega_0 x, \quad \alpha_{N+1}(x), \alpha_{N+2}(x), \ldots, \alpha_{n-1}(x), \quad \alpha_n(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\omega_0 x.$$

Теорема 3 доказана.

Определение 5. Обратной задачей № 2 для системы (7) назовем задачу нахождения функций $\alpha_i(x)$, (проводимостей) и чисел b_i (глубин залегания слоев) $i = 1, 2, \ldots, n$, по функциям $\psi(x, \eta = \eta_l)$, $l = 1, 2, \ldots, N$, из (8). В обратной задаче № 2 нужно дополнительно, по сравнению с обратной задачей № 1, определить n чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Можно предположить, что для определения этих чисел будет достаточно информации на $n + 1$ частоте в том случае, когда функции $\psi(x, \eta = \eta_l)$ достаточно представительны, например, содержат много гармоник. В самом деле. Вернемся к системе (10). Из этой системы следует, что определитель $n + 1$ порядка

$$\begin{vmatrix} \tilde{K}(\omega, \eta_1, b_1) & \tilde{K}(\omega, \eta_1, b_2) & \cdots & \tilde{K}(\omega, \eta_1, b_n) & \Phi(\omega, \eta_1) \\ \tilde{K}(\omega, \eta_2, b_1) & \tilde{K}(\omega, \eta_2, b_2) & \cdots & \tilde{K}(\omega, \eta_2, b_n) & \Phi(\omega, \eta_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{K}(\omega, \eta_{n+1}, b_1) & \tilde{K}(\omega, \eta_{n+1}, b_2) & \cdots & \tilde{K}(\omega, \eta_{n+1}, b_n) & \Phi(\omega, \eta_{n+1}) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Пусть функции $\Phi(\omega, \eta_l)$ известны при n значениях $\omega : \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Тогда равенство (14) можно рассматривать как систему n уравнений относительно n неизвестных $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$\begin{gathered} F(\omega_1, b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0, \\ F(\omega_2, b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\omega_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Вполне оправдана гипотеза, что система (15) позволит однозначно определить глубины $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Модельные примеры не противоречат этой гипотезе.

Пример 1. Рассмотрим двухслойную среду ($n = 2$). Пусть $\sigma_0 = 1$, $b_1 = 0.3$, $\alpha_1(x) = \sin x + \sin(\pi x)$, $b_2 = 0.5$, $\alpha_2(x) = 2\sin x - 2\sin(\pi x)$. Найдем решение прямой задачи для трех частот $\eta \in \{1, 4, 9\}$. Будем считать полученные данные информацией для решения обратной задачи № 2. Система (15) в этом случае состоит из двух уравнений

$$\begin{gathered} F(\omega = 1, b_1, b_2) = 0, \\ F(\omega = \pi, b_1, b_2) = 0. \end{gathered}$$

Величины b_1, b_2 меняются в треугольнике $0 < b_1 < b_2 < 1$. Оказалось, что уравнения системы можно записать в виде функций $b_1 = b_1(b_2, \omega = 1)$, $b_1 = b_1(b_2, \omega = \pi)$. При этом первая функция возрастающая, вторая – убывающая в своих областях определения. Следовательно, обсуждаемая система второго порядка имеет единственное решение $b_1 = 0.3$, $b_2 = 0.5$. Перенести этот частный результат на систему (15) не удалось. Более внимательный анализ показал, что гипотеза об однозначном решении системы (15) оправдывается не всегда.

Теорема 4 (условие неединственности решения обратной задачи № 2). *Пусть* $0 < b_1^{(i)} < b_2^{(i)} < \ldots < b_n^{(i)} < 1$, $i = 1,2$, *причем среди чисел* $b_k^{(i)}$ *нет одинаковых. Тогда найдутся такие функции* $\alpha_k^{(i)}(x)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $i = 1,2$, *из* (7) *принадлежат* $\tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty,\infty)$, *что решения прямых задач* $\psi(x,\eta = \eta_l)$, $l = 1,2,\ldots,2n-1$, *из* (8) *для двух наборов* $b_k^{(i)}$, $\alpha_k^{(i)}(x)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $i = 1,2$, *будут одинаковы.*

Таким образом, теоремы единственности для обратной задачи № 2 по информации на $N = 2n-1$ частотах нет.

Доказательство. Запишем равенство (10) для двух сред:

$$\sqrt{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\tilde{K}(\omega,b_i^{(1)},\eta_l)\mathrm{A}_i^{(1)}(\omega) = \Phi(\omega,\eta_l) = \sqrt{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\tilde{K}(\omega,b_i^{(2)},\eta_l)\mathrm{A}_i^{(2)}(\omega), \quad l = 1,2,\ldots,2n-1. \tag{16}$$

Преобразуем (16) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{K}(\omega,b_i^{(1)},\eta_l)\mathrm{A}_i^{(1)}(\omega) + \sum_{i=1}^{n-1}\tilde{K}(\omega,b_i^{(2)},\eta_l)(-\mathrm{A}_i^{(2)}(\omega)) = \tilde{K}(\omega,b_n^{(2)},\eta_l)\mathrm{A}_n^{(2)}(\omega), \quad l = 1,2,\ldots,2n-1. \tag{17}$$

Положим $\mathrm{A}_n^{(2)}(\omega) = 1$. Равенство (17) можно рассматривать как систему $2n-1$ уравнений относительно $2n-1$ неизвестных $\mathrm{A}_i^{(1)}(\omega)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $-\mathrm{A}_i^{(2)}(\omega)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Определитель системы не равен нулю по теореме 2. Поэтому система имеет единственное решение. Параметр ω может принимать любое число значений (конечное или бесконечное). В частности, ω может принимать n значений: $\omega \in \{\omega_1,\omega_1,\ldots,\omega_n\}$. В силу равенства (16) решения прямых задач для двух сред будут одинаковы. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что система (15) будет иметь, по крайней мере, 2 решения для данных, построенных по алгоритму теоремы.

Пример 2 (неединственности решения, $\alpha(x) \in L_1(-\infty,\infty)$). Рассмотрим однослойную среду: $\sigma_0 = 1$, $b = 0.8$, $\alpha(x) = e^{-x^2}$. Выберем частоту зондирования $\eta = 1$. Решение прямой задачи (8) для системы (9) в случае указанной среды дается формулой

$$\psi(x,\eta=1) = \frac{-sh0.2}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sh(\sqrt{\omega^2+1}\cdot 0.2)}{\sqrt{\omega^2+1}ch(\sqrt{\omega^2+1})}e^{-\frac{\sqrt{\omega^2}}{4}}e^{i\omega x}d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-B\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty}-0.00741e^{-0.624\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \approx -0.017e^{-0.40x^2}.$$

Этой же функции $\psi(x,\eta=1)$ соответствует однослойная среда с параметрами: $\sigma_0 = 1$, $b = 0.2$,

$$\alpha(x) = \frac{sh0.2}{2\sqrt{\pi}\cdot sh0.8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sh(\sqrt{\omega^2+1}\cdot 0.2)}{sh(\sqrt{\omega^2+1}\cdot 0.8)}e^{-\frac{\sqrt{\omega^2}}{4}}e^{i\omega x}d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-B\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty}0.0144e^{-0.346\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \approx 0.043e^{-0.72x^2}.$$

Пример 3 (неединственности решения, $\alpha(x) \in \tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty,\infty)$). Рассмотрим однослойную среду: $\sigma_0 = 1$, $b = 0.8$, $\alpha(x) = \sin x + \cos(\sqrt{2}x) + \sin(\pi x)$. Выберем частоту зондирования $\eta = 1$. Решение прямой задачи для этой среды дается формулой (в записи чисел здесь и в дальнейшем удерживаем 5 верных значащих цифр):

$$\psi(x,\eta=1) = -\frac{sh0.2sh(0.2\sqrt{2})}{\sqrt{2}ch(\sqrt{2})}\sin x - \frac{sh0.2sh(0.2\sqrt{3})}{\sqrt{3}ch(\sqrt{3})}\cos(\sqrt{2}x) - \frac{sh0.2sh(0.2\sqrt{\pi^2+1})}{\sqrt{\pi^2+1}ch(\sqrt{\pi^2+1})}\sin(\pi x) =$$
$$= -0.018734\sin x - 0.014094\cos(\sqrt{2}x) - 0.0031958\sin(\pi x).$$

Той же самой функции $\psi(x,\eta=1)$ соответствует однослойная среда с параметрами: $\sigma_0 = 1$, $b = 0.2$,

$$\alpha(x) = \frac{sh0.2sh(0.2\sqrt{2})}{sh0.8sh(0.8\sqrt{2})}\sin x + \frac{sh0.2sh(0.2\sqrt{3})}{sh0.8sh(0.8\sqrt{3})}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{sh0.2sh(0.2\sqrt{\pi^2+1})}{sh0.8sh(0.8\sqrt{\pi^2+1})}\sin(\pi x) =$$
$$= 0.046793\sin x + 0.042758\cos(\sqrt{2}x) + 0.023090\sin(\pi x).$$

Пример 4 (неединственности решения, $\alpha_i(x) \in \tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty,\infty)$). Реализуем алгоритм теоремы 4. Рассмотрим трехслойную среду:

$$\sigma_0 = 1, \quad b_1^{(1)} = 0.1, \quad b_2^{(1)} = 0.2, \quad b_3^{(1)} = 0.3,$$
$$\alpha_1^{(1)}(x) = 10^{-5}(8.1029\sin x + 4.9952\sin(\pi x)); \quad \alpha_2^{(1)}(x) = 10^{-4}(-6.1455\sin x - 4.1198\sin(\pi x));$$
$$\alpha_3^{(1)}(x) = 10^{-3}(1.3087\sin x + 0.95098\sin(\pi x)).$$

Рассмотрим вторую трехслойную среду:

$$\sigma_0 = 1, \quad b_1^{(2)} = 0.7, \quad b_2^{(2)} = 0.8, \quad b_3^{(2)} = 0.9,$$

$$\alpha_1^{(2)}(x) = 10^{-2}(8.9387\sin x + 8.4008\sin(\pi x)); \quad \alpha_2^{(2)}(x) = 10^{-1}(-4.4327\sin x - 4.3283\sin(\pi x)); \quad \alpha_3^{(2)}(x) = \sin x + \sin(\pi x)).$$

Функции $\alpha_i^{(j)}(x)$получены из решения системы (17). Решения прямых задач для системы (7) для этих двух сред совпадают на 5 частотах:

$$\psi(x, \eta = 1) = 10^{-4}(-1.7217\sin x - 0.34582\sin(\pi x));$$

$$\psi(x, \eta = 4) = 10^{-4}(-2.2038\sin x - 0.60899\sin(\pi x));$$

$$\psi(x, \eta = 9) = 10^{-4}(-2.1355\sin x - 0.76525\sin(\pi x));$$

$$\psi(x, \eta = 16) = 10^{-4}(-1.9108\sin x - 0.82177\sin(\pi x));$$

$$\psi(x, \eta = 25) = 10^{-4}(-1.6246\sin x - 0.79492\sin(\pi x)).$$

Обращаем внимание на факт, неожиданный для автора.

Информация для решения обратной задачи – функции $\psi(x, \eta_i)$ — зависят от 10 параметров. Трехслойная среда задается 9 параметрами: три глубины b_i и 6 коэффициентов разложения функций $\alpha_i(x)$. Информация изначально представлялась даже избыточной, но теорема 4 и пример 4 показывают, что это не так.

Теорема 5 (условие единственности решения обратной задачи № 2). *Пусть* $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < 1$. *Пусть* $\alpha_i(x) \in \tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *и каждая из* $\alpha_i(x)$ *не равна нулю тождественно. Пусть решение прямой задачи* (8) — *функция* $\psi(x, \eta)$ — *известна для* $2n$ *частот* η_k: $\eta \in \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}\}$. *Тогда обратная задача* № 2 *для системы* (7) *имеет единственное решение в классе функций* $\alpha_i(x) \in \tilde{L}_1^{(\infty)}(-\infty, \infty)$.

Замечание 4. Условие теоремы о том, что каждая из $\alpha_i^{(1)}(x)$ не равна нулю тождественно, вызвано существом задачи и обеспечивает ситуацию, что среда является n-слойной. Если, скажем, $\alpha_2(x) \equiv 0$, то среда на самом деле является $n-1$ слойной, а b_2 можно взять любым.

Доказательство теоремы 5. Как и при доказательстве теоремы 4, предположим, что данным для решения обратной задачи соответствует и вторая среда с параметрами $b_k^{(2)}$, $\alpha_k^{(2)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим сначала случай, когда среди чисел $b_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2$, нет одинаковых. Аналогично (17) получаем систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{K}(\omega, b_i^{(1)}, \eta_l)\mathrm{A}_i^{(1)}(\omega) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{K}(\omega, b_i^{(2)}, \eta_l)(-\mathrm{A}_i^{(2)}(\omega)) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{18}$$

Определитель системы (18) не равен нулю, согласно теореме 2. Следовательно, система (18) имеет только тривиальное решение при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Но нулевым $\mathrm{A}_i^{(k)}(\omega)$ соответствуют функции $\alpha_k^{(i)}(x) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы.

Случай, когда среди глубин $b_i^{(1)}$, $b_i^{(2)}$есть одинаковые, рассматривается похожим образом. Для примера разберемся с ситуацией, когда $b_1^{(1)} = b_1^{(2)}$, а среди остальных $b_i^{(k)}$нет одинаковых. Тогда равенство (18) перепишется в виде

$$\tilde{K}(\omega, b_1^{(1)}, \eta_l)(\mathrm{A}_1^{(1)}(\omega) - \mathrm{A}_1^{(2)}(\omega)) + \sum_{i=2}^{n} \tilde{K}(\omega, b_i^{(1)}, \eta_l)\mathrm{A}_i^{(1)}(\omega) + \sum_{i=2}^{n} \tilde{K}(\omega, b_i^{(2)}, \eta_l)(-\mathrm{A}_i^{(2)}(\omega)) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{19}$$

Рассмотрим для (19) подсистему из $2n-1$ уравнений, например, $l = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Определитель подсистемы не равен нулю, согласно теореме 2, поэтому $\mathrm{A}_1^{(1)}(\omega) \equiv \mathrm{A}_1^{(2)}(\omega)$, $\mathrm{A}_i^{(k)}(\omega) \equiv 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, $k = 1, 2$.

Таким образом, в рассматриваемом случае: $b_1^{(1)} = b_1^{(2)}$, $\alpha_1^{(1)}(x) = \alpha_1^{(2)}(x)$, $\alpha_i^{(k)}(x) \equiv 0$, $i = 2, \ldots, n$, $k = 1, 2$. Последнее равенство $\alpha_i^{(k)}(x) \equiv 0$ противоречит условию теоремы.

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда среди чисел $b_k^{(1)}$, $b_k^{(2)}$ есть несколько совпадающих, вплоть до случая, когда оба набора чисел совпадают. Теорема 5 доказана.

Фактическое решение обратной задачи № 2 является самостоятельной серьезной проблемой. В настоящей статье эта проблема не обсуждается. Отметим лишь, что один из подходов связан с решением системы трансцендентных уравнений, похожей на систему (15). От системы (15) анонсированная система отличается приятной особенностью: если система имеет решение, то оно единственно.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первоначальное правдоподобное предположение подтвердилось частично (предположение о том, что n-слойную среду можно восстановить по информации на $n+1$ частоте). Действительно, такие случаи бывают (пример 1). Но оказалось, что для гарантированного однозначного восстановления n-слойной среды (т.е.

для определения n функций $\alpha_i(x)$ и n чисел b_i) нужна информация на $2n$ частотах (т.е. $2n$ функций $\psi(x, \eta_k)$) (теорема 5). Однозначно восстановить n-слойную среду по $2n-1$ функциям $\psi(x, \eta_k)$ не всегда удается, даже если эти функции задаются каким угодно числом параметров (пример 4, теорема 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барашков А.С.* О возможности обнаружения тонких проводящих слоев по измерениям полей на поверхности среды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2127–2138.
2. *Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.* Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009.
3. *Романов В.Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
5. *Барашков А. С.* Дистанционное определение параметров мощных слоев с использованием промежуточной модели // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 6. С. 111–126.
6. *Новосёлов К. С.* Графен: материалы Флатландии // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181. № 12. С. 1299–1311.
7. *Дубровский В. Г.* Теоретические основы технологии полупроводниковых наноструктур. Санкт-Петербург, 2019.
8. *Барашков А.С.* Асимптотические представления решения обратных задач для уравнения Гельмгольца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 12. С. 1823–1831.
9. *Barashkov A.S.* Small Parameter Method in Multidimensional Inverse Problems. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1998.
10. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Наука, 1962.
11. *Барашков А.С.* Математика. Высшее образование. М.: АСТ, 2011.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.

FINITE FREQUENCY PROBING CAPABILITIES

A. S. Barashkov[a,*]

[a] *National Research University MPEI, ul. Krasnokazarmennaya 14, 111250 Moscow, Russia*
**e-mail: BarashkovAS@mpei.ru*

Received November 10, 2023
Revised November 1, 2024
Accepted November 8, 2024

Abstract. A two-dimensional medium in which the fields are described by the Helmholtz equation is considered. A linearized formulation of the problem is studied, which ultimately reduces to reconstructing the unknown right-hand side of the inhomogeneous Helmholtz equation in an infinite strip. The specified right-hand side in this work is taken as a sum of delta functions, which can be interpreted as the total conductivities of thin layers. The values of the solution of the Helmholtz equation and the normal derivative of the solution at the band boundary for several values of the parameter in the Helmholtz equation are used as information for solving the inverse problem. These data can be interpreted as the values of the electric and magnetic field strengths at the band boundary for a finite set of frequencies. Using the Fourier series expansion, an integral equation is obtained that relates the sought quantities to the data for solving the inverse problem. Using the Fourier transform, the conditions for the uniqueness of the solution of the inverse problem are established. Along with this, examples of the multivalued nature of the solution of the inverse problem in unexpected situations are given.

Keywords: two-dimensional medium, thin layers, infinite strip, inverse problem for the Helmholtz equation, uniqueness theorems, examples of the ambiguity of the solution when reconstructing the medium