

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2025 г. Г.А. Расолько^{1,*}, В.М. Волков^{1,**}¹1220030 Минск, пр-т Независимости, 4, Белорусский гос. Университет, Беларусь

*e-mail: rasolka@bsu.by

**e-mail: v.volkov@tut.by

Поступила в редакцию 12.09.2024 г.

Переработанный вариант 12.09.2024 г.

Принята к публикации 08.11.2024 г.

Разработаны приближенные численные алгоритмы решения сингулярных интегродифференциальных уравнений вида обобщенного уравнения Прандтля. Предлагаемые приближенные схемы основаны на представлении решения уравнения в виде разложения по ортогональному базису полиномов Чебышёва. Использование известных спектральных соотношений позволило получить аналитическое выражение для сингулярной составляющей уравнения. Как следствие, предлагаемая методика демонстрирует превосходную точность и экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения относительно степени интерполяционных многочленов. Вычислительные качества предложенной методики продемонстрированы на тестовом примере. Библ. 12. Фиг. 1.

Ключевые слова: сингулярное интегродифференциальное уравнение; спектральный метод Чебышёва.

DOI: 10.31857/S0044466925020038, **EDN:** CBZIWS

ВВЕДЕНИЕ

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение вида

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

которое называется уравнением Прандтля [1]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ — известные функции из класса $C[-1, 1]$, $\Gamma(x)$ — искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям на границе интервала, $\Gamma(\pm 1) = 0$.

Важно отметить, что ядро уравнения Прандтля имеет сингулярность, что порождает существенные трудности при численном решении подобных задач с использованием традиционных подходов, основанных на непосредственной аппроксимации интеграла квадратурными формулами [2]. В связи с этим, как показано в исследованиях ряда авторов, весьма эффективный способ обработки подобного рода сингулярностей состоит в представлении решения задачи и коэффициентов уравнения в виде интерполяционных полиномов с использованием полиномов Чебышёва (см., например, [3–8]). Данный прием с учетом известных спектральных соотношений [9, с. 188],

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} &= -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $T_n(x)$, $U_n(x)$ — многочлены Чебышёва степени n I и II рода соответственно, позволяет вычислить аналитически сингулярную составляющую интеграла и получить экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения задачи [4]. Спектральные методы на основе полиномов Чебышёва для некоторых частных случаев уравнения Прандтля построены в работах [5–7], где показана их высокая эффективность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим сингулярное уравнение Прандтля общего вида [1, 8]:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t)\Gamma'(t)dt + \int_{-1}^1 v(x,t)\Gamma(t)dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (2)$$

Здесь $B(x)$, $v(x, t)$, $g(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, $\Gamma(x)$ — искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (3)$$

Для построения приближенной схемы решения задачи (2), (3) используем интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышёва I рода [10 с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x), \quad (4)$$

где

$$c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Здесь и далее

$$\sum_{j=0}^n a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Используя известные свойства полиномов Чебышёва, см. [10, с. 23]:

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2,$$

несложно получить аналогичное приближенное представление функции $f(x)$ в виде разложения по полиномам Чебышёва II рода:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (5)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n.$$

При построении вычислительных схем используем интерполяционные многочлены функции двух переменных в виде разложения по многочленам Чебышёва:

$$\Psi_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{mj} T_j(t),$$

$$\sigma_{mj} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) \psi(x_l, x_r), \quad (6)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1.$$

Полагаем, что производная решения задачи принадлежит классу функций $h(0)$ по Мусхелишвили — класс функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [11, с. 31], т.е. $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$ $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

2. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА

Сведем уравнение (2) к уравнению Фредгольма II рода с логарифмической особенностью. Пусть

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt. \quad (7)$$

Применим формулу обращения сингулярного интеграла (7) в указанном классе функций $h(0)$:

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь c — произвольная постоянная. Отсюда с учетом (3) получим

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{u(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x,t) u(t) dt + \mu(x),$$

где

$$H(x,t) = \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}, \quad (8)$$

$$\mu(x) = c \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Учитывая, что $H(-1,t) = H(1,t)$, находим $c = 0$.

Отметим, что функция $H(x,t)$ симметрична и неотрицательна. В самом деле

$$H(x,t) = H(\cos \theta, \cos \sigma) = \ln \frac{1 - \cos(\theta + \sigma)}{2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} = \ln \frac{\sin \frac{\theta + \sigma}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} \geq 0, \quad 0 < \sigma, \theta \leq \pi.$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x,t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1. \quad (9)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt &= \int_{-1}^1 g(x,t) \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2} u(\tau)}{\tau-t} d\tau \right) dt = \\ &= - \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} u(\tau) \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x,t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt \right) d\tau = \int_{-1}^1 G(x,\tau) u(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

$$G(x,\tau) = -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x,t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt,$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt &= \int_{-1}^1 v(x,t) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(t,\varsigma) u(\varsigma) d\varsigma dt = \int_{-1}^1 u(\varsigma) \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(x,t) H(t,\varsigma) dt \right) d\varsigma = \int_{-1}^1 u(\varsigma) V(x,\varsigma) d\varsigma, \\ V(x,\varsigma) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(x,t) H(t,\varsigma) dt, \end{aligned} \quad (11)$$

а также

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt \quad (12)$$

введем линейный оператор

$$K(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \int_{-1}^1 G(x, t) u(t) dt + \int_{-1}^1 u(t) V(x, t) dt. \quad (13)$$

Таким образом, граничная задача (2), (3) сводится к операторному уравнению вида

$$u(x) + K(u; x) = f(x). \quad (14)$$

Для вывода достаточных условий разрешимости уравнения (14) оценим оператор (13) в равномерной метрике. Учитывая, что

$$\int_{-1}^1 G(x, t) u(t) dt = \int_{-1}^1 g(x, t) \Gamma'(t) dt,$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 G(x, t) u(t) dt \right| &= \left| \int_{-1}^1 g(x, t) \Gamma'(t) dt \right| \leq \int_{-1}^1 |g(x, t) \Gamma'(t)| dt \leq \|g\|_{\mathbb{C}} \int_{-1}^1 |\Gamma'(t)| dt = \\ &= \|g\|_{\mathbb{C}} \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_1^2} u(t_1)}{t_1-t} dt_1 \right| dt \leq \|g\|_{\mathbb{C}} \|u\|_{\mathbb{C}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_1^2}}{t_1-t} dt_1 \right| dt = \\ &= \|g\|_{\mathbb{C}} \|u\|_{\mathbb{C}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} |t| dt = \frac{2}{\pi} \|g\|_{\mathbb{C}} \|u\|_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, на основании (9) получим

$$|V(x, s)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(x, t) H(t, s) dt \right| \leq \|v\|_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(t, s)| dt = \|v\|_{\mathbb{C}} \sqrt{1-s^2},$$

и тогда

$$\left| \int_{-1}^1 u(t) V(x, t) dt \right| \leq \|u\|_{\mathbb{C}} \left| \int_{-1}^1 V(x, t) dt \right| \leq \|u\|_{\mathbb{C}} \|v\|_{\mathbb{C}} \left| \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \right| = \frac{\pi}{2} \|v\|_{\mathbb{C}} \|u\|_{\mathbb{C}}. \quad (16)$$

Окончательно, с учетом (9), (15), (16) имеем

$$\|Ku\|_{\mathbb{C}} \leq \|u\|_{\mathbb{C}} \left(\max_{|x| \leq 1} \left| \sqrt{1-x^2} / |B(x)| \right| + \frac{\pi}{2} \|v\|_{\mathbb{C}} + \frac{2}{\pi} \|g\|_{\mathbb{C}} \right).$$

Относительно условий разрешимости задачи имеет место

Теорема 1. Пусть функции $B(x)$, $v(x, t)$, $g(x, t)$, входящие в уравнение (2), удовлетворяют условию

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left| \sqrt{1-x^2} / |B(x)| \right| + \frac{\pi}{2} \|v\|_{\mathbb{C}} + \frac{2}{\pi} \|g\|_{\mathbb{C}} < 1. \quad (17)$$

Тогда граничная задача (2), (3) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$.

3. СХЕМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

С учетом (7), (13) и (14) приближенное решение задачи (2), (3) будем искать как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K(u_n; x) = F_n(x), \quad (18)$$

где

$$K(u_n; x) = \frac{1}{\pi B(x)} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt + \int_{-1}^1 G_{n,n}(x, t) u_n(t) dt + \int_{-1}^1 V_{n,n}(x, t) u_n(t) dt, \quad (19)$$

$F_n(x)$ — некоторая функция из класса $\mathbb{C}[-1, 1]$, такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $u_n(x)$ — интерполяционный многочлен (5) функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышёва I рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (20)$$

где $c_k, k = 0, 1, \dots, n$, — пока неизвестные постоянные, $g_{n,n}(x, t), v_{n,n}(x, t)$ — интерполяционные многочлены для функций $g(x, t), v(x, t)$ соответственно. Используя интерполяционные многочлены, построенные на основании (4), (5) подобно (6), получим две вычислительные схемы приближенного решения уравнения (2).

Схема 1. В (10) и (11) для функций $g(x, t), v(x, t)$ выберем интерполяционные многочлены вида (6) $g_{n,n}(x, t), v_{n,n}(x, t)$. Тогда, используя интерполяционные представления,

$$G_{n,n}(x, \tau) = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt, \quad V_{n,n}(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) H(t, \tau) dt,$$

вычислим последовательно интегралы в формуле (19).

С учетом (1), (19) и (20) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя (1), (10) и явное представление (6) для функции $g_{n,n}(x, t)$, вычислим функцию $G_{n,n}(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} G_{n,n}(x, \tau) &= -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt = -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{mj} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt \right) = \\ &= -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=1}^n \sigma_{mj} U_{j-1}(\tau), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{mj} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (23)$$

Интегралы в (18), (19) вычислим используя представления (22), (23). Изменяя порядок суммирования, с учетом свойства ортогональности многочленов Чебышёва имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 G_{n,n}(x, \tau) u_n(\tau) d\tau &= - \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=1}^n \sigma_{mj} U_{j-1}(\tau) \right) \left(\sum_{k=0}^n c_k U_k(\tau) \right) d\tau = \\ &= - \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=1}^n \sigma_{mj} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_k(\tau) U_{j-1}(\tau) d\tau \right) = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\sigma_{m,k+1}$ определены формулой (23).

Далее, используя явное представление (6) для функции $v_{n,n}(x, t)$ и (21), с учетом (1) и свойств многочленов Чебышёва [10], получим

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \int_{-1}^1 V_{n,n}(x, \varsigma) u_n(\varsigma) d\varsigma \equiv \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{mj} \int_{-1}^1 T_j(t) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{mj} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) T_j(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{mj} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)}{2} dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{mj} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) v(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как

$$\beta_m = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_m(t) dt = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & m = -2, \\ \frac{\pi}{2}, & m = 0, \\ 0, & m \neq -2, 0, \end{cases} \quad (27)$$

то, относительно $L_n(x)$ имеем

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2(k+1)} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{mj} (\beta_{k-j} + \beta_{k+j}), \quad (28)$$

и, с учетом (27), получим

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2k+2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{mj} \beta_{k-j} + c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m0}. \quad (29)$$

Таким образом, на основании (21), (24) и (29) имеем

$$\begin{aligned} K(u_n; x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x) - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2k+2} \sum_{j=0}^n \beta_{k-j} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{mj} + c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m0}. \end{aligned} \quad (30)$$

В результате, с учетом (20), (27), (30), уравнение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} &c_0 \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} + 1 + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\omega_{m0} - 2\omega_{m2} - 2\sigma_{m,1}) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{U_k(x)}{k+1} + U_k(x) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{4k+4} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\omega_{mk} - \lambda_k \omega_{mk+2}) \right) + \\ &+ c_n \left\{ \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{1}{n+1} + 1 \right) U_n(x) + \frac{\pi}{4n+4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{mn} \right\} = F_n(x), \quad \lambda_k \equiv \begin{cases} 0, & k > n-2, \\ 1, & k \leq n-2. \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Из уравнения (31) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления c_0, c_1, \dots, c_n , которая получается путем последовательной подстановки в (31) вместо x нулей многочлена Чебышёва I рода,

$x_i = \cos \frac{2i+1}{2n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 & c_0 \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + 1 + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\omega_{m0} - 2\omega_{m2} - 2\sigma_{m,1}) \right) + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{U_k(x_i)}{k+1} + U_k(x_i) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)\sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{4k+4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\omega_{mk} - \lambda_k \omega_{mk+2}) \right) + \\
 & + c_n \left\{ \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{1}{n+1} + 1 \right) U_n(x_i) + \frac{\pi}{4n+4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)\omega_{mn} \right\} = F_n(x_i), \quad \lambda_k \equiv \begin{cases} 0, & k > n-2, \\ 1, & k \leq n-2. \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n.
 \end{aligned} \quad (32)$$

Совместность системы уравнений (32) позволяет вычислить коэффициенты c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (2), (3) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (21) для произвольной точки $x \in [-1, 1]$.

Схема 2. В (10) и (11) для функций $g(x, t)$, $v(x, t)$ выберем интерполяционные многочлены $g_{n,n}(x, t)$ и $v_{n,n}(x, t)$ вида

$$\begin{aligned}
 g_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{mj} T_j(t), \\
 \eta_{mj} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} (T_m(x_l) - v_m T_{m+2}(x_l)) g(x_l, x_r), \\
 \delta_j &= \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases} \quad v_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,
 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 v_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{mj} U_j(t), \\
 \rho_{mj} &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n v(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \\
 \theta_j &= \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.
 \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, как и в предыдущем случае, последовательно вычислим интегралы в выражении (19). Используя (1), (10) и явное представление (33) для функции $g_{n,n}(x, t)$, имеем

$$\begin{aligned}
 G_{n,n}(x, \tau) &= -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt = -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{mj} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt \right) = \\
 &= -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=1}^n \eta_{mj} U_{j-1}(\tau).
 \end{aligned} \quad (35)$$

С учетом ортогональности многочленов Чебышёва имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 G_{n,n}(x, \tau) u_n(\tau) d\tau = - \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} \left(\sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=1}^n \eta_{mj} U_{j-1}(\tau) \right) \left(\sum_{k=0}^n c_k U_k(\tau) \right) d\tau = \\
 &= - \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=1}^n \eta_{mj} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_k(\tau) U_{j-1}(\tau) d\tau \right) = - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,k+1},
 \end{aligned} \quad (36)$$

где $\eta_{m,k+1}$ определены в (33).

Далее, используя (1), (21), (34) и свойства многочленов Чебышёва

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \int_{-1}^1 V_{n,n}(x, \varsigma) u_n(\varsigma) d\varsigma \equiv \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{mj} \int_{-1}^1 U_j(t) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{mj} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{mk}. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая проделанные вычисления (36) и (37), имеем

$$K(u_n; x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x) - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \eta_{m,k+1} + \pi \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2k+2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{mk}, \quad (38)$$

и уравнение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{U_k(x)}{k+1} + U_k(x) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \eta_{m,k+1} + \frac{\pi}{2k+2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{mk} \right) + \\ &+ c_n \left\{ \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{1}{n+1} + 1 \right) U_n(x) + \frac{\pi}{2n+2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{mn} \right\} = F_n(x). \end{aligned} \quad (39)$$

Как и в схеме 1, из уравнения (39) получаем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления c_0, c_1, \dots, c_n , подставляя последовательно в (39) вместо x нули многочлена Чебышёва I рода, а именно, $x_i = \cos \frac{2i+1}{2n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{U_k(x_i)}{k+1} + U_k(x_i) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n U_m(x_i) \eta_{m,k+1} + \frac{\pi}{2k+2} \sum_{m=0}^n U_m(x_i) \rho_{mk} \right) + \\ &+ c_n \left\{ \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{1}{n+1} + 1 \right) U_n(x_i) + \frac{\pi}{2n+2} \sum_{m=0}^n U_m(x_i) \rho_{mn} \right\} = f(x_i). \end{aligned} \quad (40)$$

Совместность системы уравнений (40) позволяет вычислить коэффициенты c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (2), (3) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (21) для произвольной точки $x \in [-1, 1]$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Приведем результаты численного эксперимента, проведенного согласно построенным численным схемам (23), (32) и (23), (40).

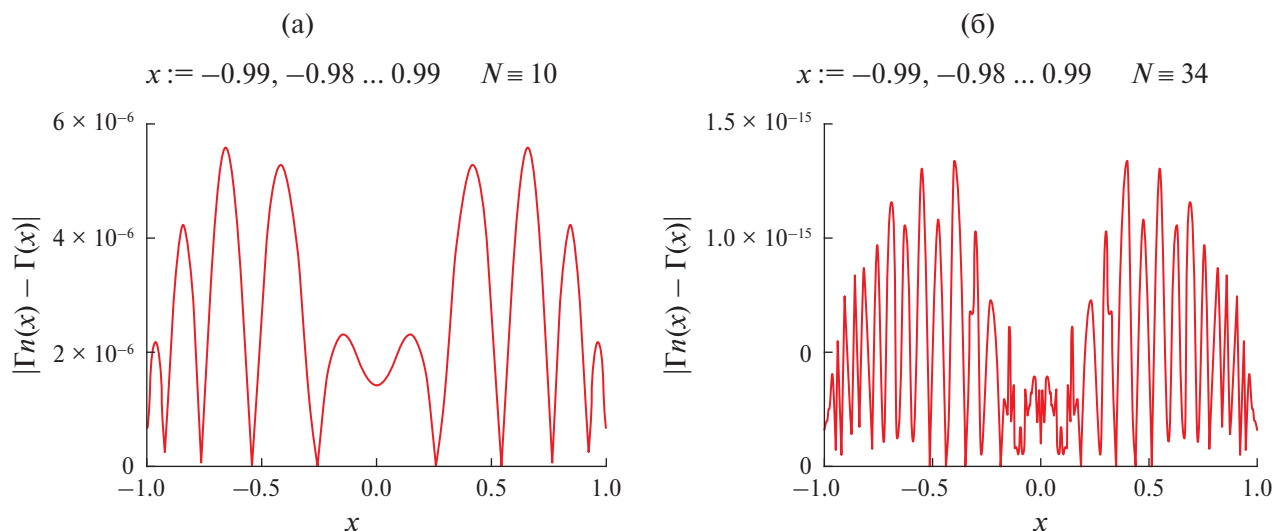
Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x, t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^1 v(x, t) \Gamma(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \\ &g(x, t) = \frac{1}{5} \frac{1}{x-2} \frac{t}{t+2}, \quad v(x, t) = \frac{1}{5} \frac{x}{x+2} \frac{t}{t^2+1}, \quad B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1.1+4x^2}{1+2x^2}, \\ &f(x) = \frac{1}{B(x)} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{\sqrt{2}}{x^2+1} + 1 - \frac{2\pi (\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5)}{25x-50}. \end{aligned} \quad (41)$$

Известно, что решением задачи (3), (41) является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right).$$

Несложно убедиться, что производная данной функции $\Gamma'(x) \in h(0)$.



Фиг. 1. Абсолютная величина погрешности приближенного решения задачи (41), (3), полученного по схеме 2 при $n = 10$, и $n = 34$.

Как показывают расчеты, уже при сравнительно небольших значениях n достигается предельная точность приближенного решения, погрешность которого ограничена снизу лишь с вычислительной погрешностью.

Решая системы уравнений (32) или (40) при $n = 10$ и $n = 34$, приближенные решения $\Gamma_n(x)$, вычисленные по формуле (21), отличаются от точного решения $\Gamma(x)$ в точках $x = -0.99, -0.98, \dots, 0.99$, не более чем на $5.6 \cdot 10^{-6}$ и $1.5 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц систем (34) и (42) при размерности n равной 10 и 34 соответственно $\text{cond}(C_{10}) \leq 25$ и $\text{cond}(C_{34}) \leq 142$, что позволяет грубо оценить зависимость числа обусловленности от размерности как $\text{cond}(C_n) \cong O(n^{3/2})$.

Представленные результаты численных экспериментов позволяют оценить эмпирически скорость сходимости построенных численных алгоритмов как экспоненциальную:

$$\delta = \|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)\|_C = O(\exp(-\alpha n)), \quad (42)$$

где $\alpha > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от n . Для рассмотренного примера $\alpha \cong 1$ ($\exp(-34) = 1.7 \cdot 10^{-15}$). Естественно, что это весьма частный пример, не претендующий на сколь-нибудь значимые обобщения. Вместе с тем, априорные оценки погрешности численных методов решения подобных задач, полученные, например, в работах [8, 12] представляются весьма осторожными и указывают на необходимость дальнейших исследований в направлении их оптимизации.

Таким образом, развитая в данной работе приближенная методика обладает высокой эффективностью в классе сингулярных интегродифференциальных уравнений прандтлевского типа. На примере тестовой задачи продемонстрировано, что дискретная модель, основанная на представлении решения в виде разложения по полиномам Чебышёва, приводит к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения, а сходимость погрешности приближенного решения может достигать экспоненциальной скорости относительно степени интерполяционного полинома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. М.: ГИИТЛ, 1949.
2. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968. 287 с.
3. Elliott D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc $(-1, 1)$ // The Journal of Integral Equations and Applications. — 1989. С. 59–94.
4. Sahlan M. N., Feyzollahzadeh H. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations // Math. Sciences. 2017. Т. 11. С. 165–171.

5. *Расолько Г.А.* Численное решение сингулярного интегродифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Ж. Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 68–74.
6. *Расолько Г.А.* К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Ж. Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 58–68.
7. *Расолько Г.А., Шешко С.М., Шешко М.А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 9. С. 1285–1292.
8. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения уравнения теории крыла // Изв. вузов. Матем. 1974. № 2. С. 29–44.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
10. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
11. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
12. *Ожёгова А.В., Сурай Л.А.* О сходимости в интегральной метрике приближенных решений обобщенного уравнения теории крыла. Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2014. № 1. С. 64–67.

CHEBYSHEV SPECTRAL METHOD FOR ONE CLASS OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

G. A. Rasol'ko^{a,*}, V. M. Volkov^{a,**}

^aBelarusian State University, pr. Nezavisimosti 4, 1220030 Minsk, Belarus

*e-mail: rasolka@bsu.by

**e-mail: v.volkov@tut.by

Received September 12, 2024

Revised September 12, 2024

Accepted November 8, 2024

Abstract. An approximate numerical method for solving singular integro-differential equations of the generalized Prandtl equation type has been developed. The proposed approximate schemes are based on representing the solution and coefficients of the equation as an expansion over an orthogonal basis of Chebyshev polynomials. The use of known spectral relations has made it possible to obtain an analytical expression for the singular component of the equation. As a consequence, the proposed method demonstrates excellent accuracy and exponential rate of convergence of the approximate solution relative to the degree of interpolation polynomials. The computational qualities of the proposed method are demonstrated using a test example.

Keywords: singular integro-differential equation; Chebyshev spectral method