ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ВЫВОД ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ СНИЗУ ДЛЯ БИЛИНЕЙНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ВЕСОМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1)]

© 2025 г. А. А. Злотник[1,*]

[1] 109028 Москва, Покровский б-р, 11, НИУ Высшая школа экономики, Россия
*e-mail: azlotnik@hse.ru

Поступила в редакцию 25.10.2024 г.
Переработанный вариант 25.10.2024 г.
Принята к публикации 08.11.2024 г.

Изучается трехслойный по времени билинейный метод конечных элементов с весом для начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения. Дается вывод оценок погрешности снизу порядков $(h+\tau)^{2\lambda/3}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 3$ в нормах L^1 и $W_h^{1,1}$. В них каждая из двух начальных функций или свободный член в уравнении принадлежат пространствам типа Гёльдера соответствующих порядков гладкости. Они обосновывают точность по порядку соответствующих известных оценок погрешности (сверху) метода конечных элементов с весом второго порядка аппроксимации для гиперболических уравнений второго порядка, а также невозможность их улучшения при максимальном ослаблении степени суммируемости в нормах погрешности и максимальном ее усилении в нормах данных. Вывод основан на методе Фурье. Библ. 10.

Ключевые слова: волновое уравнение, метод конечных элементов, оценки погрешности снизу на пространствах данных, метод Фурье.

DOI: 10.31857/S0044466925020013, **EDN**: CCBGRZ

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были доказаны достаточно общие оценки погрешности трехслойного по времени метода конечных элементов (МКЭ) с весом для начально-краевой задачи для гиперболических уравнений второго порядка. В случае методов второго порядка аппроксимации это в том числе оценки погрешности порядка $O((h+\tau)^{2\lambda/3})$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 3$, в равномерных по t (по времени) норме L^2 по x (по пространству) и энергетической норме (в том числе сеточной по x) при обеих начальных функциях и свободном члене уравнения из пространств Соболева и Никольского соответствующих порядков гладкости и со степенями суммируемости 2 по x и 1 по t. В одномерном случае подобные результаты были анонсированы намного раньше в теореме 1 в [2] и в равномерной по t норме L^2 по x были доказаны в [3]. Обратим внимание на то, что порядки этих оценок множителем 2/3 радикально отличаются от порядков соответствующих оптимальных оценок погрешности МКЭ в случаях эллиптических и параболических уравнений, см., в частности, [4]. Интересные результаты в этом направлении для нестационарного уравнения Шрёдингера были установлены в [5].

В данной работе изучается билинейный МКЭ с весом в случае простейшего гиперболического одномерного волнового уравнения. Выводятся оценки погрешности снизу порядков $(h+\tau)^{2\lambda/3}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 3$, в нормах L^1 и $W_h^{1,1}$ со степенью суммируемости 1 и по t, и по x. В них каждая из двух начальных функций или свободный член в уравнении принадлежат пространствам типа Гёльдера соответствующих порядков гладкости. Они обосновывают точность по порядку упомянутых оценок погрешности метода конечных элементов второго порядка аппроксимации из [1, 2], а также невозможность их улучшения при максимальном ослаблении (до 1) степени суммируемости в нормах погрешности и одновременном максимальном ее усилении (до ∞) в нормах данных. Более того, в [1] свободный член брался из различных пространств функций с доминирующей смешанной гладкостью по x и t, а здесь в оценках погрешности снизу использовано сразу пересечение всех этих пространств. Дополнительно показано, что оценки погрешности нельзя улучшить, если в норме погрешности исходную прямоугольную область по x и t сузить до любого ее подпрямоугольника. Доказательство основано на явных фурье-формулах для точного и приближенного решений и асимптотическом анализе погрешности на начальных данных-гармониках и свободном члене – произведении гармоник по x и t со специальным выбором

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 23-21-00061).

номеров гармоник в зависимости от шагов сеток по x и t и веса в методе. Эти результаты несколько обобщают и усовершенствуют оценки погрешности снизу и их доказательство, данные в [2, 3].

В статье [6] была получена оценка погрешности снизу порядка h^2 в равномерной по t и L^2-норме по x при первой начальной функции из пространства Соболева $W^{3,2}$. Это было сделано для полудискретного, а не полностью дискретного, МКЭ второго порядка аппроксимации, также с помощью метода Фурье. Такой результат был распространен на полудискретный МКЭ высокого порядка аппроксимации в [7].

Отметим также, что практические порядки погрешности на сгущающихся сетках на конкретных негладких данных (вместо пространств данных), разрывных или с разрывными производными различных порядков, также согласующиеся с теоретическими оценками погрешности из [1, 2], были установлены в [8].

В разд. 1 статьи ставится начально-краевая задача для волнового уравнения, дается операторная форма билинейного МКЭ с весом и выводится формула типа Фурье для его решения. В разд. 2 выполняется асимптотический анализ поведения погрешности на данных-гармониках. В разд. 3 определяются пространства типа Гёльдера и выводятся теоремы об оценках погрешности снизу на данных из этих пространств.

1. БИЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ВЕСОМ

Поставим начально-краевую задачу для 1D волнового уравнения

$$\partial_t^2 u - c_0^2 \partial_x^2 u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = I_X \times I_T, \tag{1.1}$$

$$u|_{x=0,X} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in I_X, \tag{1.2}$$

при однородном краевом условии Дирихле. Здесь $c_0 = \text{const} > 0$ и $I_a = (0, a)$. Введем набор данных этой задачи $\mathbf{d} := (u_0, u_1, f)$ и его разложение $\mathbf{d} = \mathbf{d}^{(0)} + \mathbf{d}^{(1)} + \mathbf{d}^{(2)}$, где $\mathbf{d}^{(0)} = (u_0, 0, 0)$, $\mathbf{d}^{(1)} = (0, u_1, 0)$ и $\mathbf{d}^{(2)} = (0, 0, f)$.

Пусть $\bar\omega_h$ и $\bar\omega^\tau$ – равномерные сетки с узлами $x_i = ih$, $0 \leqslant i \leqslant N$, и $t_m = m\tau$, $0 \leqslant m \leqslant M$, на $\bar I_X$ и $\bar I_T$, с шагами $h = X/N$ и $\tau = T/M$, соответственно. Пусть $\omega_h = \bar\omega_h \setminus \{0, X\}$ и $\bar\omega_{\mathbf{h}} = \bar\omega_h \times \bar\omega^\tau$ с $\mathbf{h} := (h, \tau)$. Пусть $w_i = w(x_i)$, $y^m = y(t_m)$ и $v_i^m = v(x_i, t_m)$.

Пусть $\mathcal{S}_h$ – пространство линейных конечных элементов, состоящее из функций из $C(\bar I_X)$, линейных на каждом элементе $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Пусть $\mathcal{S}^\tau$ – аналогичное пространство функций, связанное с $\bar I_T$ и $\bar\omega^\tau$. Напомним, что $C(\bar I_a)$ – пространство функций w, непрерывных на $\bar I_a$, с нормой $\|w\|_{C(\bar I_a)} = \max_{x \in \bar I_a} |w(x)|$; пространство $C(\bar Q_T)$ определяется аналогично. Для $w \in C(\bar I_X)$ обозначим через $s_x w \in \mathcal{S}_h$ ее интерполянт такой, что $s_x w(x_i) = w(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant N$. Оператор s_t по t определяется аналогично.

Введем сеточные операторы по x и t

$$B_h w_i = \frac{1}{6} w_{i-1} + \frac{2}{3} w_i + \frac{1}{6} w_{i+1}, \quad L_h w_i = -c_0^2 \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2}, \ 1 \leqslant i \leqslant N-1,$$

$$\delta_t y^m = \frac{y^{m+1} - y^m}{\tau}, \ \bar\delta_t y^m = \frac{y^m - y^{m-1}}{\tau}, \quad \bar\delta_t \delta_t y^m = \frac{y^{m+1} - 2y^m + y^{m-1}}{\tau^2}.$$

Ясно, что B_h и L_h – масштабированные операторы (матрицы) масс и жесткости, соответствующие $\mathcal{S}_h$.

Для решения начально-краевой задачи (1.1), (1.2) рассмотрим МКЭ с заданным весом σ. Его трехслойная по времени операторная форма такова [1]

$$(B_h + \sigma\tau^2 L_h)\delta_t \bar\delta_t v^m + L_h v^m = f^{h,\tau,m} \quad \text{на} \quad \omega_h, \ 1 \leqslant m \leqslant M-1, \tag{1.3}$$

$$(B_h + \sigma\tau^2 L_h)\delta_t v^0 + \frac{\tau}{2} L_h v^0 = u_1^h + \frac{\tau}{2} f^{h,\tau,0} \quad \text{на} \quad \omega_h, \tag{1.4}$$

$$v^0 = v^{(0)} \quad \text{или} \quad v^0 = u_0 \quad \text{на} \quad \bar\omega_h, \ v_i^m|_{i=0,N} = 0, \ 1 \leqslant m \leqslant M, \tag{1.5}$$

где $v^{(0)}$ является решением задачи

$$(B_h + \sigma\tau^2 L_h) v^{(0)} = u_0^h \quad \text{на} \quad \omega_h, \ v_i^{(0)}|_{i=0,N} = 0. \tag{1.6}$$

Исходная проекционная форма (форма Галеркина) этого метода, основанная на σ-регуляризованном интегральном тождестве для начально-краевой задачи (1.1), (1.2), здесь не требуется и поэтому опускается (см. ее в [1]). Предполагается, что приближенное решение $v = v_{\mathbf{h}}$ принадлежит пространству билинейных конечных элементов $\mathcal{S}_h \otimes \mathcal{S}^\tau$, где $\otimes$ – знак тензорного произведения пространств.

Здесь для $w \in L^1(I_X)$ и $z \in L^1(I_T)$ используются следующие МКЭ-усреднения

$$w_i^h = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} w(x) e_i^h(x)\, dx, \ z^{\tau,0} = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau z(t) e^{\tau,0}(t)\, dt, \ z^{\tau,m} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{m-1}}^{t_{m+1}} z(t) e^{\tau,m}(t)\, dt,$$

где $1 \leqslant i \leqslant N-1$, $1 \leqslant m \leqslant M-1$ и

$$e_i^h(x) = \max\left\{1 - \left|\frac{x}{h} - i\right|, 0\right\}, \quad e^{\tau,m}(t) = \max\left\{1 - \left|\frac{t}{\tau} - m\right|, 0\right\}$$

суть хорошо известные базисные функции-шапочки. Также $f_i^{h,\tau,m} = (f_i^h)^{\tau,m}$ для $f \in L^1(Q_T)$. Если w, z и f являются распределениями на I_X, I_T и Q_T, то используются более общие формулы

$$w_i^h = \langle w, e_i^h\rangle, \;\; z^{\tau,m} = \langle z, e^{\tau,m}\rangle, \;\; f_i^{h,\tau,m} = \langle f, e_i^h e^{\tau,m}\rangle,$$

в которых справа стоят значения этих распределений на указанных базисных функциях.

С использованием масштабирования можно предполагать, что $X = \pi$. Напомним хорошо известные спектральные формулы

$$B_h s_k = \beta_k s_k, \quad L_h s_k = c_0^2 \lambda_k s_k, \quad \beta_k = \frac{2 + \cos kh}{3}, \quad \lambda_k = \left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2, \tag{1.7}$$

с $s_k(x) = \sin(kx)$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$. Наложим два условия на σ:

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - (1 - \varepsilon_0^2)\frac{h^2}{12 c_0^2 \tau^2}, \tag{1.8}$$

$$|\sigma - \sigma_N| \geqslant \varepsilon_1 \sigma N, \quad \sigma_N := \frac{1}{12} + \frac{h^2}{12 c_0^2 \tau^2}. \tag{1.9}$$

В связи с первым условием напомним, что $h^2/12 \leqslant \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant N-1} \beta_k/\lambda_k$. Здесь и ниже параметры $0 < \varepsilon_0 < 1$ и $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, не зависят от $\mathbf{h}$. Предполагается также, что если σ зависит от $\mathbf{h}$, то $|\sigma(\mathbf{h})| \leqslant \bar{\sigma}$ при всех $\mathbf{h}$. Условие (1.8) обеспечивает устойчивость рассматриваемого МКЭ, а условие (1.9) исключает случай $\sigma = \sigma_N$, когда уравнение (1.3) имеет более высокий 4-й порядок аппроксимации $O(|\mathbf{h}|^4)$ вместо 2-го, например, см. [9].

Пусть также $c_0 = 1$. При $\mathbf{d}(x,t) = (\alpha_0, \alpha_1, g(t))\sin kx$, где α_0 и α_1 — постоянные и $g \in L^1(I_T)$, хорошо известна формула Фурье для решения поставленной выше начально-краевой задачи

$$u(x,t) = \left(\alpha_0 \cos kt + \frac{\alpha_1}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t g(\theta)\sin k(t-\theta)\,d\theta\right)\sin kx, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T. \tag{1.10}$$

Выведем ее аналог для указанного выше МКЭ. Пусть ниже $1 \leqslant k \leqslant N-1$.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathbf{d}(x,t) = (\alpha_0, \alpha_1, g(t))\sin kx$ с $g \in L^1(I_T)$. Тогда верна следующая формула для решения указанного выше МКЭ*

$$v(x,t) = \left(\gamma_{0k}\alpha_0 \cos \mu_k t + \gamma_{1k}\frac{\alpha_1}{k}\sin \mu_k t + \frac{\gamma_{1k}}{k}\int_0^t g(\theta) s_\theta \sin \mu_k (t-\theta)\,d\theta\right)\sin kx \tag{1.11}$$

при $(x,t) \in \bar{\omega}_{\mathbf{h}}$, с коэффициентами μ_k, γ_{0k} и γ_{1k}, заданными формулами

$$\mu_k = \frac{2}{\tau}\arcsin\frac{\varphi_k \tau}{2}, \quad \varphi_k = \left(\frac{\lambda_k}{\beta_k + \tau^2\sigma\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2}{\tau\sqrt{1 + 4\varepsilon_0^2 \beta_k/(\tau^2\lambda_k)}}, \tag{1.12}$$

$$\gamma_{0k} = \frac{1}{k^2}\varphi_k^2 \quad \text{при} \quad v_0 = v^{(0)} \quad \text{или} \quad \gamma_{0k} = 1 \quad \text{при} \quad v_0 = s_x u^{(0)}, \;\; \gamma_{1k} = \frac{2}{k\tau}\operatorname{tg}\frac{\mu_k \tau}{2}. \tag{1.13}$$

Здесь и ниже для краткости зависимость коэффициентов от $\mathbf{h}$ *и* σ *не указывается.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $g = 0$. Решение МКЭ ищется в виде

$$v(x,t) = (\beta_{0k}\cos \mu_k t + \beta_{1k}\sin \mu_k t)\sin kx, \;\; (x,t) \in \bar{\omega}_{\mathbf{h}},$$

где коэффициенты μ_k, β_{0k} и β_{1k} не зависят от x и t. Также $\mu_k \tau$ определяется с точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; более того, можно предполагать, что $0 \leqslant \mu_k \tau \leqslant \pi$.

Подставим такое v в уравнения (1.3)–(1.5). В силу формул (1.7) и аналогичной формулы для $\delta_t \bar{\delta}_t$ уравнение (1.3) приводит к следующему уравнению для μ_k:

$$\left(\frac{2}{\tau}\sin\frac{\mu_k \tau}{2}\right)^2 = \frac{\lambda_k}{\beta_k + \tau^2\sigma\lambda_k}. \tag{1.14}$$

В силу условия (1.8) имеем $\beta_k + \tau^2\sigma\lambda_k \geqslant \varepsilon_0^2\beta_k + (\tau/2)^2\lambda_k$, и поскольку $0 \leqslant \mu_k \leqslant \pi/\tau$, то верны соотношения (1.12). В силу формулы $\sin kx = -(1/k^2)\partial_x^2 \sin kx$ легко проверить, что

$$(\sin kx)_i^h = \frac{1}{k^2} L_h \sin kx_i = \frac{\lambda_k}{k^2} \sin kx_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1. \tag{1.15}$$

Поэтому из соотношений для v_0 следует, что $\beta_{0k} = \gamma_{0k}\alpha_0$, где γ_{0k} задается формулой (1.13).

Уравнение (1.4) влечет алгебраическое уравнение

$$(\beta_k + \tau^2\sigma\lambda_k)\left(\beta_{0k}\frac{\cos\mu_k\tau - 1}{\tau} + \beta_{1k}\frac{\sin\mu_k\tau}{\tau}\right) + \beta_{0k}\frac{\tau}{2}\lambda_k = \alpha_1\frac{\lambda_k}{k^2}.$$

Поскольку $1 - \cos\xi = 2\sin^2(\xi/2)$ и $\sin\xi = 2\sin(\xi/2)\cos(\xi/2)$, то с использованием (1.14) получаем, что слагаемые с β_{0k} сокращаются и $\beta_{1k} = \gamma_{1k}\alpha_1/k$, где γ_{1k} задается формулой (1.13).

2. Пусть теперь $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Имеем $f_i^{h,\tau,m} = (\lambda_k/k^2)g^{\tau,m}\sin kx_i$. Пусть $\delta_{mm'}$ — символ Кронекера, а $\chi_+(t) = 1$ при $t > 0$ и $\chi_+(t) = 0$ при $t \leqslant 0$. При $g^{\tau,m} = (2/\tau)\delta_{m0}$ в силу уравнений МКЭ решение является тем же самым, что и выше в п. 1 при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ и $g = 0$:

$$v(x,t) = v_*(x,t) := \frac{\gamma_{1k}}{k}(\sin\mu_k t)\sin kx, \ (x,t) \in \bar{\omega}_{\mathbf{h}}.$$

Дополнительно в соответствии с данным выше выводом формулы для γ_{1k} выполняется равенство

$$(\beta_k + \tau^2\sigma\lambda_k)\left\{\delta_t\bar{\delta}_t\left(\frac{\gamma_{1k}}{k}(\sin\mu_k t)\chi_+(t)\right)\right\}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda_k}{\tau k^2}.$$

Поэтому для $g^{\tau,m} = (1/\tau)\delta_{mm'}$, $1 \leqslant m' \leqslant M-1$, получаем

$$v(x,t) = v_*(x, t - m'\tau)\chi_+(t - m'\tau), \ (x,t) \in \bar{\omega}_{\mathbf{h}}.$$

В общем случае для $\mathbf{d}(x,t) = (0, 0, g(t)\sin kx)$ в силу линейности МКЭ, определения усреднений $(\cdot)^{\tau,m}$ и разложения $s_\theta w$ по базису из функций-шапочек, его решение может быть записано в виде

$$v(x,t) = \frac{\tau}{2}g^{\tau,0}v_*(x,t) + \sum_{m'=1}^{M-1}\tau g^{\tau,m'}v_*(x, t-m'\tau)\chi_+(t-m'\tau) =$$
$$= \int_0^T g(\theta)\sum_{m'=0}^{M-1} e^{\tau,m'}(\theta)v_*(x,t-m'\tau)\chi_+(t-m'\tau)\,d\theta =$$
$$= \frac{\gamma_{1k}}{k}\int_0^T g(\theta)s_\theta[(\sin\mu_k(t-\theta))\chi_+(t-\theta)]\,d\theta\sin kx = \frac{\gamma_{1k}}{k}\int_0^t g(\theta)s_\theta\sin\mu_k(t-\theta)\,d\theta\sin kx$$

при $(x,t) \in \bar{\omega}_{\mathbf{h}}$, поскольку $\chi_+(t-\theta) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \theta \leqslant T$. Лемма доказана.

Отметим, что поскольку функции $\{\sin kx\}_{k=1}^{N-1}$ образуют базис в пространстве функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных 0 при $x_i = 0, \pi$, то из доказанной леммы непосредственно следует фурье-разложение произвольного решения МКЭ.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Теперь разложим величины μ_k и γ_{jk}. Ниже $O(\cdot)$–величины не зависят от $\mathbf{h}$ и k.

Лемма 2.1. *При $k\tau = O(1)$ верны асимптотические формулы*

$$\mu_k \asymp k, \quad \text{то есть} \quad \underline{c}k \leqslant \mu_k \leqslant \bar{c}k, \tag{2.1}$$

$$\mu_k = k + k^3\nu_{\mathbf{h}} + O(k^5|\mathbf{h}|^4) \quad c \quad \nu_{\mathbf{h}} = \frac{1}{24}\left(h^2 - (12\sigma - 1)\tau^2\right) = -\frac{1}{2}(\sigma - \sigma_N)\tau^2, \tag{2.2}$$

$$\gamma_{jk} = 1 + O(k^2|\mathbf{h}|^2), \quad j = 0, 1, \tag{2.3}$$

с некоторыми $0 < \underline{c} < \bar{c}$, не зависящими от $\mathbf{h}$ *и* k.

Доказательство. Поскольку $(2/\pi)x \leqslant \sin x \leqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то получим, что $\sqrt{\lambda_k} \asymp k$ и $\mu_k \asymp \varphi_k$. При $k\tau = O(1)$ имеем $\varepsilon_0^2/3 \leqslant \beta_k + \sigma\tau^2\lambda_k = O(1)$, $\varphi_k \asymp k$ и поэтому $\mu_k \asymp k$. Более того, в силу соотношений (1.12) получим, что $\mu_k\tau/2 \leqslant (\pi/2)\varphi_k\tau/2 \leqslant \pi/(2(1+\varepsilon_2))$ с некоторым $\varepsilon_2 > 0$.

Формула $\sin x = x - (1/6)x^3 + O(|x|^5)$ влечет разложения

$$\sqrt{\lambda_k} = k - \frac{1}{24}k^3h^2 + O(k^5h^4), \quad \beta_k = 1 - \frac{1}{6}h^2\lambda_k = 1 - \frac{1}{6}k^2h^2 + O(k^4h^4).$$

Как следствие

$$\varphi_k = k + \frac{1}{24}k^3(h^2 - 12\sigma\tau^2) + O(k^5|\mathbf{h}|^4). \tag{2.4}$$

Это разложение, формула $\arcsin x = x+(1/6)x^3+O(|x|^5)$ при $|x| \leqslant c_1 < 1$ и условие $k\tau = O(1)$ влекут разложение (2.2).

Разложение (2.3) при $j = 0$ следует из (2.4), а при $j = 1$ оно следует из формул $\operatorname{tg} x = x + O(|x|^3)$ при $|x| \leqslant \pi/(2(1+\varepsilon_2))$ и (2.2).

Следствие 2.1. Пусть ниже выполнены оба условия (1.8), (1.9). Для любого $\alpha > 0$, не зависящего от $\mathbf{h}$, существует натуральное число $\bar{k}_{\mathbf{h}} \leqslant N-1$ такое, что $\bar{k}_{\mathbf{h}} \asymp |\mathbf{h}|^{-2/3}$ и

$$\mu_{\bar{k}_{\mathbf{h}}} = \bar{k}_{\mathbf{h}} + \alpha \operatorname{sgn} \nu_{\mathbf{h}} + O\big(|\mathbf{h}|^{2/3}\big).$$

Доказательство. Условие (1.9) обеспечивает, что $|\nu_{\mathbf{h}}| \asymp |\mathbf{h}|^2$.

Положим $\rho_{\mathbf{h}} = \big(\alpha/|\nu_{\mathbf{h}}|\big)\big)^{1/3}$ и возьмем $|\mathbf{h}|$ столь малым, что $(\rho_{\mathbf{h}} + 2)h \leqslant \pi$ (что не ограничивает общности). Положим $\bar{k}_{\mathbf{h}} = [\rho_{\mathbf{h}}] + 1$, где $[\rho_{\mathbf{h}}]$ – целая часть $\rho_{\mathbf{h}}$. Тогда $1 \leqslant \bar{k}_{\mathbf{h}} \leqslant N-1$, $\bar{k}_{\mathbf{h}} \asymp \rho_{\mathbf{h}} \asymp |\mathbf{h}|^{-2/3}$ и $|\bar{k}_{\mathbf{h}} - \rho_{\mathbf{h}}| \leqslant 1$, и поэтому в силу разложения (2.2) выводим

$$\mu_{\bar{k}_{\mathbf{h}}} - \bar{k}_{\mathbf{h}} - \alpha \operatorname{sgn} \nu_{\mathbf{h}} = (\bar{k}_{\mathbf{h}}^3 - \rho_{\mathbf{h}}^3)\nu_{\mathbf{h}} + O(\bar{k}_{\mathbf{h}}^5|\mathbf{h}|^4) = O\big(|\mathbf{h}|^{2/3}\big).$$

При любых $a > 0$, $(\xi_1, \xi_2) \subset I_X$ и $w \in W^{1,1}(I_X)$ справедлива оценка

$$\Big|\int_{\xi_1}^{\xi_2} |w(x)\sin ax|\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2} |w(x)|\,dx\Big| \leqslant \Big(\|w'\|_{L^1(I_X)} + \big(1 + \frac{\pi}{2}\big)\|w\|_{L^\infty(I_X)}\Big)\frac{4}{a}. \tag{2.5}$$

Достаточно проверить упрощенную оценку при $(\xi_1, \xi_2) = I_X$, с заменой $4/a$ на $2/a$. С этой целью представим $\bar{I}_X$ как объединение сегментов $\Delta_l = \big[(l-1)\pi/a, l\pi/a\big]$, $1 \leqslant l \leqslant \bar{l} := \big[aX/\pi\big]$, и $\Delta = \big[\bar{l}\pi/a, X\big]$. Упрощенная оценка (2.5) верна потому, что с использованием интегральной теоремы о среднем и равенства $\int_{\Delta_l} |\sin ax|\,dx = 2/a$ имеем

$$\Big|\int_{\Delta_l} |w(x)\sin ax|\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\Delta_l} |w(x)|\,dx\Big| \leqslant \frac{2}{a}\big||w(\xi_{1l})| - |w(\xi_{2l})|\big| \leqslant \frac{2}{a}\|w'\|_{L^1(\Delta_l)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant \bar{l},$$

при некоторых $\xi_{1l}, \xi_{2l} \in \Delta_l$ и

$$\int_{\Delta} |w(x)\sin ax|\,dx \leqslant \int_{\Delta} |w(x)|\,dx \leqslant \|w\|_{L^\infty(I_X)}\frac{\pi}{a}.$$

Оценка (2.5) с cos вместо sin и множителем $(3/2)(1 + \pi/2)$ вместо $1 + \pi/2$ доказывается аналогично и также используется ниже.

Теперь введем параметр $\eta_k = k + \operatorname{sgn} \nu_{\mathbf{h}}$, наборы данных

$$\mathbf{d}_k^{(0)} = (\sin kx, 0, 0), \ \mathbf{d}_k^{(1)} = (0, \sin kx, 0), \ \mathbf{d}_k^{(2)} = (0, 0, (\sin kx)\sin \eta_k t)$$

и функции $\zeta_j(t) = 2\sin t$, $j = 0, 1$, и $\zeta_2(t) = 1 - \cos t$. Пусть $(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}]$ – погрешность МКЭ при заданном наборе данных $\mathbf{d}$; напомним, что $v_{\mathbf{h}} = s_x s_t v_{\mathbf{h}}$ в $\bar{Q}_T$.

Ключевым в доказательстве оценок погрешности снизу служит следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $j = 0, 1, 2$. *Для некоторого натурального числа* $k = \bar{k}_{\mathbf{h}} \asymp |\mathbf{h}|^{-2/3}$ *верны следующие формулы:*

$$\|(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)} = k^{-p_j}\Big(\frac{4}{\pi^2}\|\zeta_j\|_{L^1(\Pi)} + O(|\mathbf{h}|^{2/3})\Big), \tag{2.6}$$

$$\|\partial_x(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)} = k^{-p_j+1}\Big(\frac{4}{\pi^2}\|\zeta_j\|_{L^1(\Pi)} + O(|\mathbf{h}|^{1/3})\Big), \tag{2.7}$$

с $p_0 = 0$ *и* $p_1 = p_2 = 1$, *для любого прямоугольника* $\Pi = (\xi_1, \xi_2) \times (\theta_1, \theta_2) \subset Q_T$, *не зависящего от* $\mathbf{h}$, *где* O*-слагаемые не зависят от* Π. *Ниже берутся прямоугольники* Π *только такого вида.*

Формулы (2.6) *и* (2.7) *сохраняют силу при замене* u *на* $s_x u$, $s_t u$ *или* $s_x s_t u$.

Доказательство. 1. Пусть $k\tau = O(1)$ и $(x,t) \in \bar{Q}_T$ (а не только $(x,t) \in \bar{\omega}_{\mathbf{h}}$). Сначала установим представление

$$(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(0)}](x,t) = (\cos kt - \cos \mu_k t)\sin kx + r_k(x,t) \tag{2.8}$$

с оценкой остаточного члена

$$\|r_k\|_{C(\bar{Q}_T)} = O(k^2|\mathbf{h}|^2). \tag{2.9}$$

В силу формул типа Фурье (1.10), (1.11) имеем

$$\begin{aligned} r_k(x,t) = (\cos \mu_k t)\sin kx - \gamma_{0k}(s_t \cos \mu_k t)s_x \sin kx = (\cos \mu_k t - s_t \cos \mu_k t)\sin kx + \\ +(\sin kx - s_x \sin kx)s_t \cos \mu_k t + (1-\gamma_{0k})(s_t \cos \mu_k t)s_x \sin kx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Хорошо известные оценки погрешности линейной интерполяции

$$\|w - s_x w\|_{C(\bar{I}_\pi)} \leqslant \frac{1}{8}h^2\|\partial_x^2 w\|_{C(\bar{I}_\pi)}, \quad \|y - s_t y\|_{C(\bar{I}_T)} \leqslant \frac{1}{8}\tau^2\|\partial_t^2 y\|_{C(\bar{I}_T)},$$

см., например, [10], и асимптотические формулы (2.1) и (2.3) влекут оценку (2.9). При замене u на $s_x u$, $s_t u$ или $s_x s_t u$ в (2.8) вывод оценки (2.9) меняется незначительно.

2. Далее, пусть сначала η_k в определении $\mathbf{d}_k^{(2)}$ будет любым таким, что $|\eta_k| = O(k)$. Положим

$$y^{(a)}(t) := \int_0^t (\sin \eta_k \theta)\sin a(t-\theta)\,d\theta, \quad y_a(t) := \int_0^t (\sin \eta_k \theta)s_\theta \sin a(t-\theta)\,d\theta.$$

Отметим, что прямое вычисление интеграла приводит к формуле

$$y^{(a)}(t) = -\frac{1}{2}\frac{\sin \eta_k t - \sin at}{\eta_k - a} + \frac{1}{2}\frac{\sin \eta_k t + \sin at}{\eta_k + a}, \quad |a| \neq |\eta_k|. \tag{2.11}$$

Установим представление

$$k(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(2)}](x,t) = (y^{(k)}(t) - y^{(\mu_k)}(t))\sin kx + r_k(x,t); \tag{2.12}$$

здесь и ниже через r_k обозначаются различные остаточные члены, подчиняющиеся оценке (2.9). В силу формул (1.10), (1.11) последний остаточный член можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_k(x,t) = \left\{ \left(y^{(\mu_k)} - y_{\mu_k}\right)(t) + (y_{\mu_k} - s_t y_{\mu_k})(t) \right\} \sin kx + \\ +(\sin kx - s_x \sin kx)s_t y_{\mu_k}(t) + (1-\gamma_{1k})s_t y_{\mu_k}(t)s_x \sin kx. \end{aligned}$$

Этот r_k удовлетворяет оценке (2.9) в силу тех же самых оценок и асимптотических формул, что и в п. 1, вместе с формулой $y''_{\mu_k}(t) = O(k^2)$, которая следует из последовательных формул

$$y'_a(t) = a\int_0^t (\sin \eta_k \theta)s_\theta \cos a(t-\theta)\,d\theta + (\sin \eta_k t)(s_\theta \sin a(t-\theta))|_{\theta=t},$$

$$y''_a(t) = -a^2 y_a(t) + \eta_k(\cos \eta_k t)(s_\theta \sin a(t-\theta))|_{\theta=t} + \sin \eta_k t\Big(2as_\theta \cos a(t-\theta))|_{\theta=t} + \frac{2}{\tau}\sin\frac{a\tau}{2}C_a(t)\Big),$$

где $C_a(t) := \cos a(t-(m-0.5)\tau)$ на интервале (t_{m-1}, t_m), $1 \leqslant m \leqslant M$. Здесь использовано разложение $s_\theta w$ по базису из функций-шапочек. Последняя оценка для r_k сохраняет силу при замене u на $s_x u$, $s_t u$ или $s_x s_t u$ в (2.12).

3. Пусть $\bar{\mu}_k$ таково, что $\bar{\mu}_k = \mu_k + O(k^2|\mathbf{h}|^2)$. Заметим, что замена μ_k на $\bar{\mu}_k$ в главных членах представлений (2.8) и (2.12) не ухудшает оценку остаточных членов.

Теперь выберем число $k = \bar{k}_{\mathbf{h}}$ согласно следствию 2.1. Положим $\bar{\mu}_k = k + \alpha\,\mathrm{sgn}\,\nu_{\mathbf{h}}$ и $\eta_k = (k+\bar{\mu}_k)/2 = k + (\alpha/2)\,\mathrm{sgn}\,\nu_{\mathbf{h}}$ и воспользуемся явной формулой (2.11). Главный член представления (2.12) с заменой μ_k на $\bar{\mu}_k$ можно упростить следующим образом:

$$\frac{1}{\bar{\mu}_k - k}\Big(\sin \bar{\mu}_k t - 2\sin\frac{k+\bar{\mu}_k}{2}t + \sin kt\Big)\sin kx = \frac{2}{\alpha\,\mathrm{sgn}\,\nu_{\mathbf{h}}}\Big(\cos\frac{\alpha t}{2} - 1\Big)(\sin \eta_k t)\sin kx,$$

где $k = \bar{k}_{\mathbf{h}}$. Фиксируем также $\alpha := 2$.

Следовательно, при $j = 0, 2$ получим

$$k^{p_j}\left|(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}](x,t)\right| = |\zeta_j(t)\sin \eta_k t||\sin kx| + O(|\mathbf{h}|^{2/3}) \quad \text{при} \quad k = \bar{k}_{\mathbf{h}}, \tag{2.13}$$

где функция $\zeta_j(t)$ была введена выше и O-слагаемое не зависит от (x, t). Чтобы вывести формулу (2.6), остается применить оценку (2.5) и аналогичную ей оценку по t. В соответствии с упомянутым выше в формуле (2.13) и поэтому также в формуле (2.6) можно заменить u на $s_x u$, $s_t u$ или $s_x s_t u$.

4. Для вывода формулы (2.7) можно применить ∂_x к представлениям (2.8) и (2.12). Поскольку $\partial_x v_{\mathbf{h}}$ кусочно постоянна по x, то нужно исключить $x \in \omega_h$. Например, при $j = 0$ из (2.10) получим

$$\partial_x r_k(x,t) = (\cos\mu_k t - s_t\cos\mu_k t)\partial_x \sin kx + \partial_x(\sin kx - s_x \sin kx)s_t\cos\mu_k t + (1-\gamma_{0k})(s_t\cos\mu_k t)\partial_x s_x \sin kx.$$

Далее, очевидно, что

$$\partial_x s_x \sin kx = \partial_x \sin kx + O(k^2 h) = k(\cos kx + O(kh))$$

равномерно по $x \in \bar{I}_\pi \backslash \omega_h$. Следовательно, при $k|\mathbf{h}| = O(1)$ получим

$$\partial_x(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(0)}](x,t) = k\big((\cos kt - \cos\mu_k t)\cos kx + O(k|\mathbf{h}|)\big) \tag{2.14}$$

равномерно по $(x,t) \in (\bar{I}_\pi \backslash \omega_h) \times \bar{I}_T$, что в итоге влечет формулу (2.7).

При замене u на $s_x u$ в формуле (2.7) ее вывод несколько упрощается. Например, при $j = 0$ имеем

$$\partial_x(s_x u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(0)}](x,t) = (\cos kt - \cos\mu_k t + \rho_k(t))\partial_x s_x \sin kx,$$

где $\|\rho_k\|_{C(\bar{I}_T)} = O(k^2|\mathbf{h}|^2)$, вместо (2.8), (2.9). Следовательно, при $k|\mathbf{h}| = O(1)$ формула (2.7) сохраняет силу при замене u на $s_x u$.

Формула (2.7) также сохраняет силу при замене u на $s_t u$ или $s_t s_x u$. Чтобы в этом убедиться, достаточно дополнительно оценить $\partial_x(u - s_t u)$ и $\partial_x(s_x u - s_x s_t u)$. Например, при $j = 0$ имеем

$$|\partial_x(u - s_t u)| = |(\cos kt - s_t\cos kt)\partial_x \sin kx| \leqslant k^2\tau^2 k = kO(k\tau)$$

при $k\tau = O(1)$. Величина $\partial_x(s_x u - s_x s_t u) = (\cos kt - s_t\cos kt)\partial_x s_x \sin kx$ оценивается точно также.

5. Случай $j = 1$ в (2.6), (2.7) рассматривается совершенно аналогично $j = 0$. Теорема доказана.

3. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ СНИЗУ

Чтобы сформулировать оценки погрешности снизу по отношению к начальным функциям u_0 и u_1, введем некоторые пространства Гёльдера и их подпространства. Пусть $C_0^\ell(\bar{I}_a)$ при целом $\ell \geqslant 0$ состоит из функций $w \in C(\bar{I}_a)$, имеющих $\partial_x^\ell w \in C(\bar{I}_a)$, с $\partial_x^{2k} w|_{x=0,a} = 0$ при $0 \leqslant 2k \leqslant \ell$, и снабжено нормой $\|w\|_{C_0^\ell(\bar{I}_a)} := \|w\|_{C(\bar{I}_a)} + \|\partial_x^\ell w\|_{C(\bar{I}_a)}$. Следует обратить внимание на то, что здесь и ниже понимание нижнего индекса 0 не совсем стандартно и относится к обнулению функций и их производных только четного порядка на границе (или ее частях).

Пусть $C^0(\bar{I}_a) = C(\bar{I}_a)$. Пространство $C^\lambda(\bar{I}_a)$ при $0 < \lambda < 1$ состоит из функций $w \in C(\bar{I}_a)$ с конечной нормой

$$\|w\|_{C^\lambda(\bar{I}_a)} = \|w\|_{C(\bar{I}_a)} + |w|_{\bar{I}_a}^{(\gamma)}, \quad |w|_{\bar{I}_a}^{(\gamma)} := \sup_{0<\gamma<a} \gamma^{-\lambda}\|w(x+\gamma) - w(x)\|_{C(\bar{I}_{a-\gamma})}.$$

Пусть также $C_0^\lambda(\bar{I}_a)$ – подпространство функций $w \in C^\lambda(\bar{I}_a)$ с $w|_{x=0,a} = 0$, снабженное той же нормой. Пусть $C_0^\lambda(\bar{I}_a)$ при $-1 \leqslant \lambda < 0$ – это пространство распределений $w = \partial_x W$ таких, что $W \in C^{\lambda+1}(\bar{I}_a)$ и $\int_{I_a} W(x)\,dx = 0$, снабженное нормой $\|w\|_{C_0^\lambda(\bar{I}_a)} = \|W\|_{C^{\lambda+1}(\bar{I}_a)}$; здесь нижний индекс 0 используется только для единообразия записи пространств.

Пространство $C_0^\lambda(\bar{I}_a)$ при нецелом $\lambda > 1$ состоит из функций $w \in C_0^\ell(\bar{I}_a)$ с $\ell = [\lambda]$, имеющих конечную норму $\|w\|_{C_0^\lambda(\bar{I}_a)} = \|w\|_{C(\bar{I}_a)} + \|\partial_x^\ell w\|_{C^{\lambda-\ell}(\bar{I}_a)}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.8), (1.9) *на* σ *и* $0 < \delta_0 \leqslant \pi T$ *произвольно. Существуют* $h_0 > 0$ *и* $c_1 > 0$ *такие, что верны следующие оценки погрешности снизу по отношению к начальным функциям* u_0 *и* u_1*:*

$$\sup_{u_j(x)=\sin kx,\, k\in\mathbb{N}} \frac{\|(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|u_j\|_{C_0^{\lambda-j}(\bar{I}_\pi)}} \geqslant c_1|\mathbf{h}|^{2\lambda/3} \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 3, \quad j = 0, 1, \tag{3.1}$$

$$\sup_{u_j(x)=\sin kx,\, k\in\mathbb{N}} \frac{\|\partial_x(s_x u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|u_j\|_{C_0^{\lambda-j}(\bar{I}_\pi)}} \geqslant c_1|\mathbf{h}|^{2(\lambda-1)/3} \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant 4, \quad j = 0, 1, \tag{3.2}$$

при $|\mathbf{h}| \leqslant h_0$ *и для любого прямоугольника* $\Pi \subset Q_T$ *с площадью* $|\Pi| \geqslant \delta_0$.

Оценка (3.1) *сохраняет силу при замене* u *на* $s_x u$, $s_t u$ *или* $s_x s_t u$. *Оценка* (3.2) *сохраняет силу при замене* $s_x u$ *на* $s_x s_t u$, u *или* $s_t u$.

Эта теорема доказывается ниже вместе с последующей теоремой.

Чтобы сформулировать оценки погрешности снизу по отношению к свободному члену f, потребуется ввести пространства и подпространства типа Гёльдера функций с доминирующей смешанной гладкостью порядка λ_1 по x и λ_2 по t. Они существенно уже соответствующих стандартных пространств Гёльдера функций гладкости $\lambda_1+\lambda_2$ и по x, и по t.

Во-первых, пусть пространство $C_0^{\lambda,0}(\bar{Q}_T)$, $\lambda \geqslant -1$, определяется совершенно аналогично $C_0^{\lambda}(\bar{I}_a)$, с заменой пространств $C(\bar{I}_a)$ и $C(\bar{I}_{a-\gamma})$ и их норм на $C(\bar{Q}_T)$ и $C(\bar{I}_{\pi-\gamma}\times\bar{I}_T)$ и соответствующие нормы. Пусть $SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ при $\lambda_2=0$ – подпространство функций $f\in C_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_T)$ с $f|_{t=0}=0$ при $\lambda_1\geqslant 0$, либо распределений $f=\partial_x F$ при $-1\leqslant\lambda_1<0$, где $\int_{I_\pi}F(x,t)\,dx=0$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$ и $F|_{t=0}=0$.

Далее, $SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ при $\lambda_1\geqslant 0$ и $0<\lambda_2<1$ состоит из функций $f\in SC_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_T)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)}=\|f\|_{C_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_T)}+|f|^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{\bar{Q}_T},\ \ |f|^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{\bar{Q}_T}:=\sup_{0<\gamma_2<T}\gamma_2^{-\lambda_2}\|f(x,t+\gamma_2)-f(x,t)\|_{C_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_{T-\gamma_2})}.$$

Пространство $SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ при $\lambda_1\geqslant 0$ и $-1\leqslant\lambda_2<0$ состоит из распределений $f=\partial_t G$ таких, что $G\in SC_0^{\lambda_1,\lambda_2+1}(\bar{Q}_T)$ (в частности, $G|_{t=0}=0$), и снабжено нормой $\|f\|_{SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)}=\|G\|_{SC_0^{\lambda_1,\lambda_2+1}(\bar{Q}_T)}$.

Пространство $SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ при $\lambda_1\geqslant 0$ и $\lambda_2\geqslant 1$ состоит из функций $f\in C_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_T)$, имеющих $\partial_t^{\ell_2}f\in C_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_T)$, $\ell_2=[\lambda_2]$, и таких, что $\partial_t^{2k_2}f|_{t=0}=0$, $0\leqslant 2k_2\leqslant\ell_2$, с конечной нормой

$$\|f\|_{SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)}=\|\partial_t^{\ell_2}f\|_{C_0^{\lambda_1,0}(\bar{Q}_T)}+|\partial_t^{\ell_2}f|^{(\lambda_1,\lambda_2-\ell_2)}_{\bar{Q}_T}+\sum_{1\leqslant 2k_2-1\leqslant\ell_2-1}\|\partial_t^{2k_2-1}f|_{t=0}\|_{C_0^{\lambda_1+\lambda_2-2k_2-2}(\bar{I}_\pi)}.$$

Здесь некоторые дополнительные предположения о гладкости производных f по времени при $t=0$ наложены в соответствии с [1].

Наконец, пространство $SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ при $-1\leqslant\lambda_1<0$ и $\lambda_2\geqslant 0$ состоит из распределений $f=\partial_x F$ таких, что $F\in SC^{\lambda_1+1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$, $\int_{I_\pi}F(x,t)\,dx=0$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$, и снабжено нормой $\|f\|_{SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)}=\|F\|_{SC^{\lambda_1+1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)}$. Здесь пространство $SC^{\lambda_1+1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ отличается от своего подпространства $SC_0^{\lambda_1+1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)$ тем, что опущены все предположения об обнулении F и ее производных по времени при $x=0,\pi$, но сохраняет прежнее аналитическое выражение для нормы.

При $\lambda\geqslant 0$ введем множество $\Lambda_{\lambda-1}$ индексов (λ_1,λ_2) таких, что $\lambda_1\geqslant -1$, $\lambda_2\geqslant -1$, $\lambda_1+\lambda_2=\lambda-1$, а также $\lambda_1\geqslant 0$ или $\lambda_2\geqslant 0$, и норму в соответствующем пересечении введенных выше пространств с одинаковой суммарной гладкостью

$$\|f\|_{S_0^{\lambda-1}(\bar{Q}_T)}=\sup_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda_{\lambda-1}}\|f\|_{SC_0^{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{Q}_T)}.$$

Случай $\lambda_1,\lambda_2\in[-1,0)$ (возникающий при $0\leqslant\lambda<1$) можно было бы также охватить, но здесь он опущен.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.8), (1.9) *на* σ *и* $0<\delta_0\leqslant\pi T$ *произвольно. Существуют* $h_0>0$ *и* $c_1>0$ *такие, что верны следующие оценки погрешности снизу по отношению к* f:

$$\sup_{f(x,t)=(\sin kx)\sin(k\pm1)t,\,k\in\mathbb{N},\,k\geqslant 2}\frac{\|(u-v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}^{(2)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|f\|_{S_0^{\lambda-1}(\bar{Q}_T)}}\geqslant c_1|\mathbf{h}|^{2\lambda/3}\quad\text{при всех}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 3,\tag{3.3}$$

$$\sup_{f(x,t)=(\sin kx)\sin(k\pm1)t,\,k\in\mathbb{N},\,k\geqslant 2}\frac{\|\partial_x(s_xu-v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}^{(2)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|f\|_{S_0^{\lambda-1}(\bar{Q}_T)}}\geqslant c_1|\mathbf{h}|^{2(\lambda-1)/3}\quad\text{при всех}\quad 1\leqslant\lambda\leqslant 4,\tag{3.4}$$

при $|\mathbf{h}|\leqslant h_0$ *и для любого прямоугольника* $\Pi\subset Q_T$ *с* $|\Pi|\geqslant\delta_0$.

Оценка (3.3) *сохраняет силу при замене* u *на* s_xu, s_tu *или* s_xs_tu. *Оценка* (3.4) *сохраняет силу при замене* s_xu *на* s_xs_tu, u *или* s_tu.

Отметим, что оценки (3.2) и (3.4) с u или s_tu вместо s_xu представляют интерес только при $1\leqslant\lambda\leqslant 5/2$.

Доказательство. Пусть сначала $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $\gamma>0$. Поскольку $|a-b|\leqslant 2(\max\{|a|,|b|\})^{1-\alpha}|a-b|^{\alpha}$, то справедливы оценки

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\sin k(x+\gamma)-\sin kx|\leqslant 2k^{\alpha}\gamma^{\alpha},\ \ \max_{t\geqslant 0}|\sin(k\pm1)(t+\gamma)-\sin(k\pm1)t|\leqslant 3k^{\alpha}\gamma^{\alpha}.$$

Они сохраняют силу при замене sin на cos, что используется ниже.

Чтобы охватить случай данных-распределений, применим также очевидные формулы

$$\sin kx = \partial_x(-k^{-1}\cos kx), \quad \text{где} \quad \int_0^{\pi} \cos kx\,dx = 0, \quad \text{и} \quad \sin(k\pm 1)t = (k\pm 1)^{-1}\partial_t\big(1-\cos(k\pm 1)t\big).$$

Следовательно, справедливы оценки

$$\|\sin kx\|_{C_0^{\lambda}(\bar I_\pi)} \leqslant ck^{\lambda}, \quad \|(\sin kx)\sin(k\pm 1)t\|_{\mathcal{S}_0^{\lambda}} \leqslant ck^{\lambda}, \quad \lambda \geqslant -1. \tag{3.5}$$

Теперь фиксируем некоторое $0 < \delta_0 \leqslant \pi T$. Применим теорему 2.1, выберем $k = \bar k_{\mathbf{h}}$ в соответствии с ней и получим оценки снизу

$$\|(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)} \geqslant c_1 k^{-p_j}, \quad \|\partial_x(s_x u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)} \geqslant c_1 k^{-p_j+1}, \quad j = 0,1,2,$$

при $|\mathbf{h}| \leqslant h_0$ с достаточно малым $h_0 > 0$ и некотором $c_1 > 0$, и для любого прямоугольника $\Pi \subset Q_T$ с $|\Pi| \geqslant \delta_0$. Из оценок (3.5) при $k = \bar k_{\mathbf{h}}$ следует, что

$$\frac{\|(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|\sin kx\|_{C_0^{\lambda-j}(\bar I_\pi)}} \geqslant \frac{c_1}{k^{\lambda}} \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 3,$$

$$\frac{\|\partial_x(s_x u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(j)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|\sin kx\|_{C_0^{\lambda-j}(\bar I_\pi)}} \geqslant \frac{c_1}{k^{\lambda-1}} \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant 4,$$

при $j = 0,1$ и

$$\frac{\|(u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(2)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|(\sin kx)\sin\eta_k t\|_{\mathcal{S}_0^{\lambda-1}(\bar Q_T)}} \geqslant \frac{c_1}{k^{\lambda}} \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 3,$$

$$\frac{\|\partial_x(s_x u - v_{\mathbf{h}})[\mathbf{d}_k^{(2)}]\|_{L^1(\Pi)}}{\|(\sin kx)\sin\eta_k t\|_{\mathcal{S}_0^{\lambda-1}(\bar Q_T)}} \geqslant \frac{c_1}{k^{\lambda-1}} \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant 4.$$

Поскольку $\bar k_{\mathbf{h}} \asymp |\mathbf{h}|^{-2/3}$, то эти оценки немедленно влекут оценки (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4).

Возможность замен, упомянутых в теоремах 3.1 и 3.2, следует из теоремы 2.1. Это завершает доказательство указанных теорем.

Замечание 3.1. Легко видеть, что $\int_{t_{m-1}}^{t_m} |s_t y|\,dt \leqslant 0.5\tau(|y_{m-1}| + |y_m|)$, $1 \leqslant m \leqslant M$, для функции y, заданной на $\bar\omega^{\tau}$. Как следствие, верно неравенство

$$\|s_t y\|_{L^1(\bar I_T)} \leqslant \|y\|_{L^1(\bar\omega^{\tau})} := 0.5\tau(|y_0| + |y_M|) + \tau\sum_{m=1}^{M-1}|y_m|,$$

где справа стоит сеточная L^1-норма на $\bar\omega^{\tau}$. Верно и аналогичное неравенство для $\bar\omega_h$. Поэтому, например, при $\Pi = Q_T$, в силу возможности указанных в теоремах 3.1 и 3.2 замен, оценки (3.1) и (3.3) сохраняют силу, если в них интегральные L^1-нормы по x и (или) t заменить на соответствующие сеточные L^1-нормы; оценки (3.2) и (3.4) также сохраняют силу, если в них интегральную L^1-норму по t заменить на сеточную L^1-норму. Это представляет интерес в связи с оценками погрешности в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Злотник А.А.* Оценки скорости сходимости проекционно-сеточных методов для гиперболических уравнений второго порядка // В сб.: Вычисл. процессы и системы. Вып. 8. Под. ред. Г.И. Марчука. М.: Наука, 1991. С. 116–167.

2. *Злотник А.А.* Проекционно-разностная схема для уравнения колебаний струны // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 2. С. 292–295.

3. *Злотник А.А.* Проекционно-разностные схемы для нестационарных задач с негладкими данными. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1979.

4. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.

5. *Brenner P., Thomee V., Wahlbin L.B.* Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems. Berlin: Springer, 1975.

6. *Rauch J.* On convergence of the finite element method for the wave equation // SIAM J. Numer. Anal. 1985. V. 22. № 2. P. 245–249.

7. *Haase M.C.* Extra smoothness requirements for Galerkin methods for the wave equation // SIAM J. Numer. Anal. 1996. V. 33. № 5. P. 1962–1968.

8. *Zlotnik A., Kireeva O.* Practical error analysis for the bilinear FEM and finite-difference scheme for the 1D wave equation with non-smooth data // Math. Model. Anal. 2018. V. 23. № 3. P. 359–378.

9. *Zlotnik A., Kireeva O.* On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation // Math. Model. Anal. 2021. V. 26. № 3. P. 479–502.

10. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 9-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2020.

DERIVATION OF LOWER ERROR BOUNDS FOR THE BILINEAR FINITE ELEMENT METHOD WITH A WEIGHT FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

A. A. Zlotnik[a, *]

[a] *Higher School of Economics University, Pokrovskii blv. 11, 109028 Moscow, Russia*
**e-mail: azlotnik@hse.ru*

Received October 25, 2024
Revised October 25, 2024
Accepted November 8, 2024

Abstract. We study a three-level in time bilinear finite element method with weight for an initial-boundary value problem for the one-dimensional wave equation. We derive lower error estimates of orders $(h+\tau)^{2\lambda/3}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 3$ in the L^1 and $W_h^{1,1}$ norms. In them, each of the two initial functions or the free term in the equation belongs to Hölder-type spaces of the corresponding orders of smoothness. They substantiate the accuracy in order of the corresponding known error estimates (from above) of the finite element method with a weight of the second-order approximation for second-order hyperbolic equations, as well as the impossibility of improving them with the maximum weakening of the degree of summability in the error norms and its maximum strengthening in the data norms. The derivation is based on the Fourier method.

Keywords: wave equation, finite element method, lower error estimates on data spaces, Fourier method