ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 1, с. 120–138

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.8

СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ, ФУНКЦИИ ВЫБОРА И ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ

© 2025 г. А.В. Карзанов[1,*]

[1] 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия
*e-mail: akarzanov7@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.
Переработанный вариант 29.08.2024 г.
Принята к публикации 26.09.2024 г.

В работе рассматривается модель стабильных реберных подмножеств (“матчингов”) в двудольном графе $G = (V, E)$, в котором предпочтения для вершин одной доли (“фирм”) задаются при помощи функций выбора со стандартными свойствами консистентности, заменяемости и кардинальной монотонности, а предпочтения для вершин другой доли (“работников”) – при помощи линейных порядков. Для такой модели дается комбинаторное описание структуры ротаций и предлагается алгоритм построения посета ротаций с оценкой временно́й сложности $O(|E|^2)$ (включая обращения к оракулам, связанных с функциями выбора). Как следствие, можно получить “компактное” аффинное представление стабильных матчингов и эффективно решать смежные задачи. Библ. 21.

Ключевые слова: двудольный граф, функция выбора, линейные предпочтения, стабильный матчинг, аффинная представимость, последовательный выбор.

DOI: 10.31857/S0044466925010114, **EDN**: CCGHHA

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области стабильных контрактов на двусторонних рынках начались с классической работы Гейла и Шепли [1] о стабильных марьяжах. В этой модели и ее естественных обобщениях типа “один-много” (one-to-many) и “много-много” (many-to-many) рассматривается двудольный граф $G = (V, E)$, вершины которого интерпретируются как “агенты” рынка, а ребра – как возможные “контракты” между парами агентов. Предпочтения агента $v \in V$ на множестве доступных ему контрактов (инцидентных ребер) E_v задаются строгим линейным порядком, число выбираемых контрактов ограничено заданной *квотой* $q(v)$. Допустимое по квотам множество контрактов $X \subseteq E$ считается *стабильным*, если никакой контракт из дополнения $E - X$ не является более предпочтительным для обеих сторон по сравнению с некоторыми их тех, что они выбрали.

С тех пор задачи о стабильности на двудольных графах с линейными предпочтениями в вершинах заслужили широкую популярность; обзоры результатов по этой теме представлены, например, в работах [2, 3]. Здесь из значительных установленных свойств можно выделить следующие: стабильное множество контрактов существует при любых квотах; совокупность стабильных множеств образует дистрибутивную решетку при естественном сравнении; оптимальные стабильные множества для каждой из сторон рынка могут быть построены эффективным алгоритмом. (Мы называем алгоритм *эффективным*, если число операций, или *время*, которое он затрачивает, ограничено сверху полиномом от $|V|, |E|$.)

Для определенности в разбиении множества вершин V на две доли (независимые множества, хроматические классы) будем обозначать эти доли как W и F, называя элементы в них *работниками* (workers) и *фирмами* (firms), соответственно. (В классической модели с единичными квотами, рассматриваемой в [1], вершины разных долей интерпретируются как лица “мужского” и “женского” пола.) Любое подмножество ребер $X \subseteq E$ будем для краткости именовать *матчингом* (отходя от стандартного определения последнего в литературе) и будем называть стабильное множество ребер *стабильным матчингом*. Подчеркнем, что в этой работе мы рассматриваем матчинги только в двудольных графах.

Существенно более богатый класс моделей стабильности на двудольных графах возникает при переходе от линейных предпочтений агентов к предпочтениям, определяемым функциями выбора. Для каждой вершины $v \in V$ *функция выбора* (ФВ) – это оператор C_v на 2^{E_v}, выбирающий в каждом подмножество ребер $Z \subseteq E_v$ “приемлемую” (более предпочтительную) часть $C_v(Z) \subseteq Z$. Как правило, на функцию выбора C_v накладываются аксиомы *консистентности* и *заменяемости*, что позволяет выстроить теорию стабильных матчингов, обобщающую базовые результаты для моделей с линейными предпочтениями. (Отметим, что указанная пара аксиом эквивалентна свойству *независимости от пути*, восходящему к Плотту [7].) Первоначальное развитие этой теории осуществлялось в 1980е годы, главным образом в работах Келсо и Крауфорда [4], Рота [5] и Блэра [6]. В частности, в них показывалось, что множество стабильных матчингов непусто и образует решетку.

К важному последующему вкладу следует отнести работы Алкана [8, 9] начала 2000х годов; в них показано, что при добавлении третьей аксиомы *квотируемости*, или более слабой аксиомы *кардинальной монотонности*, решетка стабильных матчингов становится дистрибутивной. Это ввиду известной теоремы Биркхофа [10] влечет представимость стабильных матчингов в виде идеалов некоторого посета.

Ранее представление такого рода было продемонстрировано в простейшем случае – для стабильных марьяжей – Ирвингом и Лейтером в работе [11]. В ней было показано, что: (а) соответствующий посет образован т.н. *ротациями* – циклами, связывающими “соседние” стабильные матчинги; (б) число ротаций не превосходит $|E|$; и (в) посет ротаций (дающий “компактное представление” множества стабильных марьяжей) может быть построен эффективно. (В то же время, в [11] установлено, что задача определения числа стабильных матчингов графа является труднорешаемой, $\#P$-трудной.) В последующей работе [12] было объяснено, что с помощью посета ротаций можно эффективно решать задачу минимизации линейной функции на множестве стабильных марьяжей; здесь привлекается метод Пикара [13], дающий сведение к классической задаче о минимальном разрезе.

В недавней работе [14] Фаэнза и Цанг провели углубленное исследование ротаций, их посетов и приложений для общих моделей Алкана в [8, 9]. Они рассматривали стабильные матчинги, порождаемые функциями выбора, в двух ситуациях: 1) ФВ для всех вершин *плоттовы* (т.е. подчиняются аксиомам консистентности и заменяемости) плюс кардинально монотонные; 2) ФВ для всех вершин плоттовы, и кроме того, для вершин одной доли, скажем, F, выполняется аксиома кардинальной монотонности, а для вершин другой доли W – аксиома квотируемости. В первом случае мы будем применять термин “общая булева модель” (ОБМ), а во втором случае – “специальная булева модель” (СБМ). Здесь термин “булевость” отражает то, что мы имеем дело с подмножествами в E или, эквивалентно, с 0, 1 функциями на E, в отличие от моделей, где допускаются стабильные функции с более общими значениями (скажем, вещественными или целочисленными).

В качестве основных результатов в [14], касающихся ОБМ, получены следующие: уточнена структура ротаций (которые не обязательно являются простыми циклами графа); показано, что множество ротаций $\mathcal{R}$ имеет размер $O(|F||W|)$; установлена биекция $X \overset{\omega}{\longmapsto} I$ между решеткой $(\mathcal{S}, \succ)$ стабильных матчингов X и решеткой $(\mathcal{I}, \subset)$ идеалов I посета ротаций; показано, что отображение ω^{-1} дает целочисленную аффинную представимость стабильных матчингов через идеалы посета. Последнее означает наличие целочисленной $E \times \mathcal{R}$ матрицы A, для которой выполняется $x = Au + x^0$, где x и u – характеристические векторы (в пространствах $\mathbb{R}^E$ и $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$, соответственно) стабильного матчинга и идеала, связанных отношением ω, а x^0 – характеристический вектор W-оптимального стабильного матчинга. Более того, замечено, что матрица A имеет полный столбцовый ранг, откуда следует, что многогранник стабильных матчингов аффинно конгруэнтен порядковому многограннику (order polytope) Стэнли [15].

Эти результаты усиливаются для СБМ. А именно, в [14] показывается, что в этом случае посет ротаций и матрица A аффинного представления могут быть построены эффективно. Здесь предполагается, что функции выбора заданы посредством *оракулов*, причем при обращении к оракулу для C_v ($v \in V$) с произвольным множеством $Z \subseteq E_v$ он выдает значение $C_v(Z)$ за “оракульное время”, полиномиальное от $|Z|$. Более того, такое время условно измеряется константой $O(1)$ (как обычно принято в подобных задачах, где оценивается только число обращений к оракулам, игнорируя сложность их выполнения). При этих предположениях время построения посета и матрицы оценивается в [14] как $O(|F|^3|W|^3)$. Аналогично моделям с линейными предпочтениями, это дает возможность для СБМ эффективно решать задачи линейной оптимизации на множестве стабильных матчингов.

В настоящей работе рассматривается облегченный вариант СБМ. Как и в полной версии, предпочтения в долях графа G задаются различно. А именно, каждая вершина v доли F снабжена функцией выбора C_v на 2^{E_v}, удовлетворяющей аксиомам плоттовости и кардинальной монотонности (подобно ОБМ и СБМ). Как и прежде, все эти ФВ задаются оракулами. В свою очередь, для каждой вершины v доли W имеется квота $q(v)$ и предпочтения на множестве E_v заданы линейным порядком. Мы условно именуем модель стабильности при таких условиях *комбинированной* булевой моделью (сокращенно, КБМ).

Следует отметить, что модель такого рода с единичными квотами вершин в W возникает в результате редукции задачи с т.н. *последовательным выбором* (sequential choice) в вершинах одной доли, описанной в работе [16].

Основная цель нашей работы состоит в разработке для КБМ относительно прозрачных методов построения ротаций и их посета, а также доказательства биекции между решетками стабильных матчингов и идеалов посета.

При этом наши алгоритмы имеют невысокую временную сложность; в частности, посет ротаций строится за время $O(|E|^2)$ (для сравнения аналогичная задача для СБМ решается в [14] за время $O(|F|^3|W|^3) \approx O(|E|^3)$).

Работа организована следующим образом.

Раздел 2 содержит базовые определения и постановки, касающиеся КБМ. В разд. 3 излагаются утверждения и средства, приводящие к определению ротаций. В разд. 4 объясняется конструкция посета ротаций и доказывается теорема об изоморфизме решеток стабильных матчингов и идеалов посета. Раздел 5 в основном посвящен алгоритмическим аспектам. Здесь показывается, что посет ротаций может быть построен за время $O(|E|^2)$, а начальный стабильный матчинг (оптимальный для W) – за время $O(|V||E|)$. Основываясь на конструкции посета ротаций, в разд. 6 мы демонстрируем аффинную представимость решетки стабильных матчингов и даем описание структурных элементов многогранника стабильных матчингов. Следует заметить, что в разд. 3–6 мы для упрощения изложения рассматриваем случай единичных квот для вершин доли W. В разд. 7 дается обобщение на случай произвольных квот при линейных предпочтениях в доле W (что не вызывает больших усилий). В заключительном разд. 8, следуя [16], дается описание вышеупомянутой модели с последовательными функциями выбора и ее редукция к КБМ. Затем мы указываем следствия для этой модели из полученных результатов для КБМ.

2. НАЧАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКИ

В рассматриваемой модели нам даны: конечный двудольный граф $G = (V, E)$ с разбиением множества вершин V на два независимых подмножества (доли) F и W, называемых множествами *фирм* и *работников*, соответственно. Без ограничения общности, можно считать, что граф G не имеет кратных ребер (см. замечание 1 в конце раздела); также можно считать, что G связен. В частности, $|V| - 1 \le |E| \le \binom{|V|}{2}$. Ребро в G, соединяющее вершины $w \in W$ и $f \in F$, может обозначаться wf.

Для вершины $v \in V$ обозначим через E_v множество ее инцидентных ребер. На этом множестве задаются предпочтения вершины (“агента”) v. Предпочтения в долях F и W имеют существенные различия.

• (**линейные предпочтения**) Для вершин $w \in W$ предпочтения заданы при помощи *линейного порядка* $>_w$ на E_w. Если для $e, e' \in E_v$ выполняется $e >_w e'$, мы говорим, что ребро e предпочтительнее для w, чем e'. Это аналогично предпочтениям в классической задаче о стабильных марьяжах Гейла и Шепли [1].

• (**функции выбора**) Для $f \in F$ предпочтения на E_f заданы при помощи функции выбора (ФВ) $C = C_f : 2^{E_f} \to 2^{E_f}$. Она удовлетворяет нескольким стандартным условиям (аксиомам). Всегда предполагается, что это сжимающий оператор, т.е. для любого $Z \subseteq E_f$ выполняется $C(Z) \subseteq Z$. Две аксиомы, касающиеся пар $Z, Z' \subseteq E_f$, выглядят так:

$$\text{(A1) если } Z \supseteq Z' \supseteq C(Z), \text{ то } C(Z') = C(Z);$$

$$\text{(A2) если } Z \supseteq Z', \text{ то } C(Z) \cap Z' \subseteq C(Z').$$

Из (A1), в частности, следует, что для любого $Z \subseteq E_f$ справедливо $C(C(Z)) = C(Z)$. В литературе свойство (A1) называют *консистентностью*, а свойство (A2) – *заменяемостью*, или *персистентностью* (последний термин встречается, например, в [17]). Как показано в [18], выполнение (A1) и (A2) эквивалентно свойству *независимости от пути*, или *плоттовости* (восходящее к работе [7]); в нашем случае это выглядит так:

$$\text{для любых } Z, Z' \subseteq E_f \text{ справедливо } C(Z \cup Z') = C(C(Z) \cup Z'). \tag{2.1}$$

Еще одна аксиома известна под названием *кардинальной монотонности*:

$$\text{(A3) если } Z \supseteq Z', \text{ то } |C(Z)| \ge |C(Z')|.$$

Важный частный случай (A3) – условие *квотируемости*; оно накладывается, когда задано число (*квота*) $q(f) \in \mathbb{Z}_{>0}$, и выгладит так:

$$\text{(A4) для любого } Z \subseteq E_f \text{ справедливо } |C(Z)| = \min\{|Z|, q(f)\}.$$

Легко проверить, что указанные аксиомы выполняются для вершин $w \in W$; в этом случае задается квота $q(w) \in \mathbb{Z}_{>0}$, и оператор C_w действует в соответствии с порядком $>_w$, а именно: в множестве $Z \subseteq E_w$ выбираются $\min\{q(w), |Z|\}$ старших элементов.

В нашем изложении, вплоть до разд. 7, мы для простоты будем как правило рассматривать КБМ с единичными квотами для всех $w \in W$, в то же время функции C_f, $f \in F$, будут произвольными при условиях (A1)–(A3).

• **(стабильность)** Для удобства изложения всякое подмножество ребер $X \subseteq E$ будем называть *матчингом*. Для $v \in V$ ограничение $X \subseteq E$ на подмножество E_v будем обозначать через X_v; иными словами, $X_v = X \cap E_v$. Подмножество $Z \subseteq E_v$ назовем *приемлемым*, если $C_v(Z) = Z$; совокупность таких подмножеств обозначим $\mathcal{A}_v$. Это понятие распространяется на подмножества во всем E; а именно, скажем, что $X \subseteq E$ приемлемое, если таковыми являются все его ограничения X_v, $v \in V$. Совокупность приемлемых множеств (матчингов) в E обозначается $\mathcal{A}$.

Для всякого $v \in V$ функция выбора C_v позволяет сравнивать приемлемые множества в E_v. А именно, для различных $Z, Z' \in \mathcal{A}_v$ скажем, что Z предпочтительнее Z', и обозначим это как $Z \succ_v Z'$, если

$$C_v(Z \cup Z') = Z.$$

Легко видеть, что отношение $\succ_w$ транзитивное.

Исходя из сравнения приемлемых подмножеств в множествах E_v, можно сравнивать приемлемые матчинги во всем E. А именно, выбирая одну из долей в G, скажем, F, для различных $X, Y \in \mathcal{A}$ будем писать $X \succ_F Y$ и говорить, что X предпочтительнее Y относительно “фирм”, если для всех $f \in F$ выполняется $X_f \succeq_f Y_f$. Порядок $\succ_W$ в $\mathcal{A}$ относительно “работников” определяется аналогично.

Определение 1. Для $v \in V$ и $Z \in \mathcal{A}_v$, скажем, что ребро $e \in E_v - Z$ *интересное* относительно Z, если $e \in C_v(Z \cup \{e\})$. Это понятие распространяется на приемлемые матчинги в E. А именно, при матчинге $X \in \mathcal{A}$ ребро $e = wf \in E - X$ называется *интересным* для вершины (“агента”) $v \in \{w, f\}$, если $e \in C_v(X_v \cup \{e\})$. Если ребро $e = wf \in E - X$ интересное для обеих вершин w и f, то говорят, что *e блокирует* X. Матчинг $X \in \mathcal{A}$ называется *стабильным*, если он не блокируется никаким ребром в $E - X$. Множество стабильных матчингов для рассматриваемых $G = (F \sqcup W, E)$, $\succ_w$, $q(w)$ $(w \in W)$, C_f $(f \in F)$ обозначим через $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G, \succ, q, C)$.

Заметим, что для $v \in V$, $Z \in \mathcal{A}_v$, $e \in E_v - Z$ и $Z' := C_v(Z \cup \{e\})$:

(i) ребро e интересное относительно Z тогда и только тогда, когда Z' равно либо (а) $Z \cup \{e\}$, либо (б) $(Z - \{e'\}) \cup \{e\}$ для некоторого $e' \in Z$;

(ii) если e интересное относительно Z, то $Z' \succ_v Z$, и наоборот. (2.2)

Здесь (i) следует из соотношений $C_v(Z) = Z$ и $Z' \subseteq Z \cup \{e\}$ и неравенства $|C_v(Z \cup \{e\})| \geq |C_v(Z)|$ (в силу кардинальной монотонности (A3)). Свойство (ii) следует из $C_v(Z' \cup Z) = C_v(Z \cup \{e\}) = Z' \neq Z$.

• Для $v \in V$ множество $\mathcal{A}_v$, снабженное отношением предпочтения $\succ_v$, обращается в решетку; в ней, в соответствии с изложенным в [9], для $Z, Z' \in \mathcal{A}_v$ точная верхняя грань $Z \curlyvee Z'$ выражается как $C_v(Z \cup Z')$ (в то время как точная нижняя грань $Z \curlywedge Z'$ выражается с использованием понятия замыкания; мы это здесь не приводим).

“Прямое произведение” решеток $(\mathcal{A}_f, \succ_f)$ для $f \in F$ дает решетку $(\mathcal{A}, \succ_F)$ (в ней для $X, X' \in \mathcal{A}$ операции $X \curlyvee_F X'$ (join) и $X \curlywedge_F X'$ (meet) относительно доли F определяются естественным образом через ограничения $X_f \curlyvee X'_f$ и $X_f \curlywedge X'_f$). Аналогично определяется решетка $(\mathcal{A}, \succ_W)$ относительно доли W.

• Теперь мы можем сформулировать важные для дальнейшего свойства множества стабильных матчингов $\mathcal{S}$; они непосредственно вытекают из соответствующих общих результатов в работе [9] (см. в ней Теорему 10). А именно,

(а) $\mathcal{S}$ непусто, и $(\mathcal{S}, \succ_F)$ является *дистрибутивной* решеткой;

(б) (свойство *полярности*): порядки $\succ_F$ и $\succ_W$ противоположны, а именно: для $X, Y \in \mathcal{S}$, если $X \succ_F Y$, то $Y \succ_W X$, и наоборот; (2.3)

(в) (свойство *инвариантности размеров*): для любой фиксированной вершины $v \in V$ число $|X_v|$ одинаково при всех $X \in \mathcal{S}$.

Мы будем обозначать минимальный и максимальный элементы в решетке $(\mathcal{S}, \succ_F)$ как $X^{\min}$ и $X^{\max}$, соответственно (тогда первый – наилучший, а второй – наихудший для доли W, в силу свойства полярности (2.3)(б)).

Отметим, что в случае выполнения квот (что, в частности, верно для доли W) свойство (в) в (2.3) имеет важное усиление (ср. [17, Corollary 3]):

для вершины $v \in V$, если ФВ C_v подчиняется аксиоме квотируемости (A4) с квотой $q(v)$, и если для некоторого (или, что эквивалентно, любого) стабильного матчинга X выполняется $|X_v| < q(v)$, то множество X_v одинаково при всех $X \in \mathcal{S}$. (2.4)

Замечание 1. Иногда в литературе о стабильных матчингах на графах (не обязательно двудольных) допускается наличие кратных ребер, т.е. рассматриваемый граф G может быть “мультиграфом”. (Такое обобщение может иметь разумные экономические интерпретации.) Однако достаточно простая конструкция позволяет преобразовать G в граф G' без кратных ребер, получая эквивалентную задачу о стабильном матчинге для G'. Такая конструкция указана в [19] для случая линейных порядков на всех вершинах; она применима и к нашей модели КБМ. (В силу этого мы в дальнейшем можем ограничиться обыкновенными графами, что упрощает изложение, не ограничивая общности; в частности, ребро может обозначаться парой его концевых вершин.) Кратко опишем данную конструкцию. В ней (каждое или желаемое) ребро e между вершинами u и v в графе G заменяется подграфом K_e, порождаемым 6-циклом O_e с последовательностью (новых) вершин $v_1, \dots, v_6$ и двумя дополнительными ребрами uv_1 и vv_4. Предпочтения в вершинах определены по кругу: ребро $v_{i-1}v_i$ лучше v_iv_{i+1} (полагая $v_6 = v_0$); кроме того, ребро uv_1 (vv_4) полагается средним в тройке для v_1 (соответственно, v_4). Квоты для всех новых вершин v_i равны 1.

Легко проверить, что в стабильном матчинге X' для модели с G' все вершины v_i должны быть покрыты X'. Отсюда следует, что ребра uv_1 и vv_4 одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат X'. Это естественно порождает матчинг X для G (единственным образом), который стабилен для модели с G. Обратно, стабильный матчинг X для G может быть преобразован в стабильный матчинг X' для G'; здесь оба ребра uv_1 и vv_4 принадлежат X' тогда и только тогда, когда ребро e принадлежит X. На подграфе K_e матчинг X' определяется единственным образом за исключением случая, когда $e \notin X$, и при этом ребро e — не интересное при X ни для вершины u, ни для вершины v; пометим это как *случай* (∗). При нем X' может быть назначен внутри K_e двумя способами: либо $v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6 \in X'$, либо $v_2v_3, v_4v_5, v_6v_1 \in X'$. О связи ротаций в G' и G будет сказано в замечании 2 в разд. 5.

3. АКТИВНЫЙ ГРАФ И РОТАЦИИ

Зафиксируем стабильный матчинг $X \in \mathcal{S}$, отличный от $X^{\max}$. Нас интересует множество $\mathcal{S}_X$ стабильных матчингов X', удовлетворяющих $X' \succ_F X$ и при этом близких к X. Последнее означает, что X *непосредственно предшествует* X' в решетке $(\mathcal{S}, \succ_F)$; иначе говоря, нет $Y \in \mathcal{S}$, лежащего между X и X', т.е. удовлетворяющего $X' \succ_F Y \succ_F X$. Для нахождения $\mathcal{S}_X$ мы будет строить т.н. *активный граф*, в котором будет выделяться семейство специальных циклов, называемых *ротациями*. Наш метод определения ротаций существенно проще и эффективнее, чем метод в [14], разработанный для более общей модели.

Определение 2. Вершину $w \in W$ назовем *дефицитной*, если $|X_w| < q(w)$. Иначе (при $|X_w| = q(w)$) будем именовать вершину w *полновесной*; множество таких вершин обозначим через $W^=$.

(Согласно свойству (2.3)(в), множество $W^=$ не зависит от $X \in \mathcal{S}$. Кроме того, ввиду (2.4) для дефицитной вершины w множество $X_w = X \cap E_w$ не зависит от $X \in \mathcal{S}$.)

В дальнейшем, когда не возникает двусмысленности, мы для краткости будем писать $\succ$ вместо $\succ_F$. Для простоты изложения мы далее будем рассматривать случай единичных квот $q(w) = 1$ для всех $w \in W$; общий случай квот q на W будет рассматриваться в разд. 7.

3.1. Активный граф

Для полновесной вершины $w \in W^=$ единственное ребро (зафиксированного) матчинга X, инцидентное w, обозначим через x_w, т.е. $X_w = \{x_w\}$. Рассмотрим множество ребер $e = fw \in E_w$, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\text{(а) } e <_w x_w, \text{ и (б) } e \text{ интересное для } f \text{ при } X, \text{ т.е. } e \in C_f(X_f \cup \{e\}). \tag{3.1}$$

Если это множество непустое, то самое лучшее ребро в нем относительно порядка $>_w$ назовем W-*допустимым* для X и обозначим $a_w = a_w(X)$.

Рассмотрим такое ребро $a_w = fw$. Согласно (2.2)(i), возможны два варианта для X_f и a_w. Если $C_f(X_f \cup \{a_w\})$ выражается как $(X_f - \{e'\}) \cup \{a_w\}$ для некоторого $e' \in X_f$ (вариант (б)), то ребро e' назовем F-*допустимым* и обозначим $b^w_f = b^w_f(X)$. Также скажем, что b^w_f *ассоциировано* с a_w, и что пара (a_w, b^w_f) образует *связку*, проходящую через вершину f.

(В случае $C_f(X_f \cup \{a_w\}) = X_f \cup \{a_w\}$ ребро a_w не порождает связку. Заметим также, что некоторые F-допустимые ребра могут быть ассоциированы с двумя и более W-допустимыми ребрами, т.е. возможны различные связки (a_w, b^w_f) и $(a_{w'}, b^{w'}_f)$, для которых $b^w_f = b^{w'}_f$.) Из определения допустимых ребер непосредственно следует, что

$$\text{для любой связки } (a, b), \text{ проходящей через вершину } f \in F, \text{ справедливо } a \notin X_f,\ b \in X_f, \text{ и } C_f(X_f \cup \{a\}) = (X_f \cup \{a\}) - \{b\}. \tag{3.2}$$

Пусть $D = D(X) = (V, E_D)$ — ориентированный граф, ребрами которого являются W-допустимые ребра, ориентированные от W к F, и F-допустимые ребра, ориентированные от F к W; мы применяем обозначение вида (w, f) для первых, и (f, w) для вторых (где $w \in W$ и $f \in F$). Применим к D следующую процедуру.

Процедура очистки. Если в текущем графе D обнаруживается вершина $w \in W$, имеющая исходящее W-допустимое ребро $a_w = (w, f)$, но не имеющая входящего F-допустимого ребра (вида (f', w)), то удаляем a_w из D. Одновременно, если такое a_w имеет ассоциированное ребро b_f^w, и это ребро не участвует в других связках, проходящих через f в текущем D, то также удаляем b_f^w из D. Кроме того, удаляем из D изолированные вершины, когда они появляются. Повторяем процедуру с новым D, и т.д., пока D не стабилизируется.

Пусть $\Gamma = \Gamma(X) = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ обозначает граф D, полученный по завершении этой процедуры. Мы называем Γ *активным графом* для X, и его ребра — *активными ребрами*. Положим $W_\Gamma := W \cap V_\Gamma$ и $F_\Gamma := F \cap V_\Gamma$. Для вершины $v \in V_\Gamma$ обозначим через $\delta^{\text{out}}(v) = \delta_\Gamma^{\text{out}}(v)$ и $\delta^{\text{in}}(v) = \delta_\Gamma^{\text{in}}(v)$ множества ребер в Γ, выходящих из v и входящих в v, соответственно. Граф Γ обладает следующими свойствами:

(а) каждая вершина $w \in W_\Gamma$ удовлетворяет $|\delta^{\text{out}}(w)| = |\delta^{\text{in}}(w)| = 1$;
(б) для каждой вершины $f \in F_\Gamma$ справедливо $|\delta^{\text{out}}(f)| = |\delta^{\text{in}}(f)|$, и связки (a_w, b_f^w), проходящие через f, попарно не пересекаются по ребрам и дают разбиение множества $\delta^{\text{out}}(f) \cup \delta^{\text{in}}(f)$ (где $a_w \in \delta^{\text{in}}(f)$ и $b_f^w \in \delta^{\text{out}}(f)$). (3.3)

Действительно, из определения W- и F-допустимых ребер следует, что $|\delta^{\text{in}}(w)|, |\delta^{\text{out}}(w)| \le 1$ для всех $w \in W_\Gamma$, и $|\delta^{\text{in}}(f)| \ge |\delta^{\text{out}}(f)|$ для всех $f \in F_\Gamma$. В результате поцедуры очистки неравенства в первом выражении (для w) обращаются в $1 = |\delta^{\text{in}}(w)| \ge |\delta^{\text{out}}(w)|$, а вид второго выражения (неравенства для f) сохраняется. Теперь требуемые равенства следуют из очевидных балансовых соотношений (поскольку ребра в Γ, выходящие из W, и ребра, входящие в F, — одни и те же, и аналогично для ребер, выходящих из F, и ребер, входящих в W).

3.2. Ротации

Из (3.3) следует, что активный граф $\Gamma = \Gamma(X)$ декомпозируется в множество попарно непересекающихся по ребрам ориентированных циклов, где каждый цикл $L = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = v_0)$ однозначно строится естественным образом, а именно: для $i = 1, \dots, k$, если $v_i \in W_\Gamma$, то $\{e_i\} = \delta^{\text{in}}(v_i)$ и $\{e_{i+1}\} = \delta^{\text{out}}(v_i)$, а если $v_i \in F_\Gamma$, то пара (e_i, e_{i+1}) образует связку, проходящую через v_i. Заметим, что все ребра в L различные, но L может самопересекаться в вершинах доли F. В зависимости от контекста мы также можем рассматривать цикл L как подграф в Γ и применять обозначение $L = (V_L, E_L)$.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$ обозначает множество указанных циклов в Γ. Для каждого цикла L определим разбиение (L^+, L^-) множества его ребер, где L^+ образовано ребрами, идущими от W к F, а L^- — ребрами, идущими от F к W (называемыми, соответственно, *W-активными* и *F-активными* ребрами). Циклы $L \in \mathcal{L}$ мы и называем *ротациями*, ассоциированными с матчингом X. Ключевые свойства ротаций приводятся в следующих двух утверждениях.

Предложение 3.1. *Для каждого $L \in \mathcal{L}(X)$ матчинг $X' := (X - L^-) \cup L^+$ является стабильным и удовлетворяет $X' \succ X$.*

Скажем, что такой матчинг X' *получен из X применением ротации L*, и обозначим через $\mathcal{S}_X$ множество таких матчингов по всем $L \in \mathcal{L}(X)$.

Предложение 3.2. *Пусть $Y \in \mathcal{S}$ и $X \prec Y$. Тогда существует $X' \in \mathcal{S}_X$, удовлетворяющий $X' \preceq Y$.*

Доказательства этих предложений существенно используют следующую лемму. Для упрощения обозначений здесь и далее для множества ребер Z и элементов $a \notin Z$ и $b \in Z$ мы можем писать $Z + a$ вместо $Z \cup \{a\}$ и $Z - b$ вместо $Z - \{b\}$.

Лемма 3.1. *Пусть $(a(1), b(1)), \dots, (a(k), b(k))$ — различные (непересекающиеся по ребрам) связки в Γ, проходящие через вешину $f \in F$. Тогда для любого множества $I \subseteq \{1, \dots, k\} =: [k]$ справедливо*

$$C_f(X_f + a(1) + \dots + a(k) - \{b(i)\colon i \in I\}) = X_f + a(1) + \dots + a(k) - b(1) - \dots - b(k).$$

Доказательство. Обозначим $X_f + a(1) + \dots + a(k) - \{b(i)\colon i \in I\}$ через Z_I. Надо показать, что $C_f(Z_I) = Z_{[k]}$ для любого $I \subseteq [k]$.

Сперва установим это для $I = \emptyset$. Для этого сравним действие C_f на $Z_\emptyset = X_f + a(1) + \dots + a(k)$ и на $Y_i := X_f + a(i)$ при произвольном $i \in [k]$. Из определения связки $(a(i), b(i))$ следует $C_f(Y_i) = X_f + a(i) - b(i)$. Применяя аксиому (A2) к паре $Z_\emptyset \supset Y_i$, имеем

$$C_f(Z_\emptyset) \cap Y_i \subseteq C(Y_i) = X_f + a(i) - b(i).$$

Поскольку Y_i содержит b_i, получаем $b_i \notin C_f(Z_\emptyset)$.

Таким образом, $C_f(Z_\emptyset) \subseteq Z_\emptyset - b(1) - \dots - b(k) = Z_{[k]}$. В этом выражении включение выполняется как равенство, что следует из кардинальной монотонности, примененной к паре $Z_\emptyset \supseteq X_f$, в силу которой

$$|C(Z_\emptyset)| \geq |C(X_f)| = |X_f| = |Z_{[k]}|.$$

Теперь покажем требуемое равенство для произвольного $I \neq \emptyset$, предполагая это выполненным по индукции для всякого $I' \subset I$. Возьмем $i \in I$, положим $I' := I - i$ и рассмотрим пару $Z_{I'} \supset Z_I$. По индукции имеем $C(Z_{I'}) = Z_{[k]}$. Тогда в силу кардинальной монотонности получим

$$|C_f(Z_I)| \leq |C_f(Z_{I'})| = |Z_{[k]}| = |X_f|.$$

С другой стороны, применяя (A2), имеем $C_f(Z_{I'}) \cap Z_I \subseteq C_f(Z_I)$. Отсюда следует, что $C_f(Z_I)$ содержит $Z_{[k]}$ (ввиду очевидного $Z_I \supseteq Z_{[k]}$). Тогда $C_f(Z_I) = Z_{[k]}$.

Лемма 3.1 доказана.

Из этой леммы следует, что

множество $Z := X_f + a(1) + \dots + a(k) - b(1) - \dots - b(k)$ — приемлемое для f и удовлетворяет $Z \succ_f X_f$. (3.4)

(Поскольку, применяя лемму 3.1 к $I = \emptyset$, имеем $C_f(Z \cup X_f) = C_f(X_f + a(1) + \dots + a(k)) = Z$.)

Доказательство предложения 3.1. Прежде всего заметим, что множество X'_v приемлемое для всех $v \in V$. Это следует из приемлемости X_v, если $v \notin V_L$. Для $w \in W \cap V_L$ множество X'_w состоит из одного ребра, и $C_w(X'_w) = X'_w$ очевидно. А для $f \in F \cap V_L$ приемлемость X'_f следует из (3.4) при $L^+ \cap E_f = \{a_1, \dots, a_k\}$ и $L^- \cap E_f = \{b(1, \dots, b(k)\}$. Таким образом, $X' \in \mathcal{A}$.

Теперь, рассуждая от противного, предположим, что X' не стабильное и рассмотрим блокирующее ребро $e = wf$ для X', т.е. e интересное для w при X'_w и интересное для f при X'_f. Заметим, что $e \notin X$. (Иначе из $e \in X$ и $e \notin X'$ следовало бы $e \in L^- \cap E_f =: B_f$, и, применяя лемму 3.1 к $A_f := L^+ \cap E_f$ и $B' := B_f - e$, мы имели бы $C_f(X'_f + e) = C_f((X_f - B') \cup A_f) = X'_f$, вопреки тому, что e интересное для f при X'_f.)

Предположим, что указанное ребро e не интересное для f при X. Тогда $C_f(X_f + e) = X_f$, откуда (применяя плоттовость (2.1)) получаем

$$C_f(X'_f \cup X_f + e) = C_f(X'_f \cup C_f(X_f + e)) = C_f(X'_f \cup X_f) = X'_f.$$

С другой стороны, полагая $Z' := C_f(X'_f + e)$, имеем

$$C_f(X'_f \cup X_f + e) = C_f(C_f(X'_f \cup X_f) + e) = C_f(X'_f + e) = Z'.$$

Следовательно, $Z' = X'_f$. Но согласно (2.2)(ii), из интересности e относительно X'_f должно следовать $Z' \succ_f X'_f$; противоречие.

Таким образом, e интересное для f при X.

Теперь, чтобы прийти к финальному противоречию, сравним e с активным ребром a_w и ребром $e' \in X$, инцидентным w; тогда $\{a_w\} = X'_w$ и $\{e'\} = X_w$. Так как e интересное для w при X', то выполняется $e >_w a_w$. В то же время, так как ребро e интересное для f при X, то e не может быть интересным для w при X (ввиду стабильности X); поэтому $e' >_w e$. Таким образом, e удовлетворяет свойству (3.1) и при этом является более предпочтительным, чем W-активное ребро a_w; противоречие.

Итак, X' не допускает блокирующих ребер, т.е. является стабильным. Свойство $X' \succ_F X$ следует из $x_w >_w a_w$, $w \in W_L$ (ввиду (2.3)(б)).

Предложение 3.1 доказано.

Доказательство предложения 3.2. Чтобы построить ротацию $L \in \mathcal{L}(X)$, определяющую требуемый матчинг X', прежде всего заметим, что согласно (2.3)(в), размеры ограничений X и Y одинаковы для каждой вершины $v \in V$, т.е. $|X_v| = |Y_v|$. Поскольку $X \neq Y$, найдется вершина $w \in W$, для которой $X_w \neq Y_w$. Тогда X_w состоит из одного ребра x_w, и Y_w состоит из одного ребра y_w, и выполняется $x_w >_w y_w$ (так как $X \prec Y$ влечет $X \succ_W Y$, ввиду полярности (2.3)(б)).

Ребро $y_w = wf$ должно быть интересным для вершины f при X. Действительно, ввиду $Y_f \succeq_f X_f$, имеем $C(Y_f \cup X_f) = Y_f$, где $C := C_f$. Тогда, используя плоттовость, имеем

$$Y_f = C(Y_f \cup X_f) = C((Y_f - y_w) \cup (X_f + y_w)) = C((Y_f - y_w) \cup C(X_f + y_w)).$$

Из $y_w \notin (Y_f - y_w)$ следует $y_w \in C(X_f + y_w)$, поэтому y_w интересное для f при X.

Следовательно, имеется активное ребро $a_w = wg$, для которого $x_w >_w a_w \geq_w y_w$. Рассмотрим вершину g и множества X_g и Y_g. Ребро a_w является интересным для g при X, но не при Y (иначе мы имели бы $a_w \neq y_w$ и $a_w >_w y_w$, и тогда ребро a_w было бы интересным при Y для обеих вершин w и g, вопреки стабильности Y). Итак, $C_g(Y_g + a_w) = Y_g$.

Факт. *$C_g(X_g + a_w) = X_g + a_w - b$ для некоторого $b \in X_g$; при этом b не принадлежит Y, и для $Z := X_g + a_w - b$ выполняется $X_g \prec_g Z \preceq_g Y_g$.*

Доказательство. Ввиду интересности a_w относительно X_g, возможны два случая (ср. (2.2)(i)): (а) $C(X_g + a_w) = X_g + a_w$, или (б) $C(X_g + a_w) = X_g + a_w - b$ для некоторого $b \in X_g$, где $C := C_g$. В случае (а), если $a_w \in Y$, имеем

$$|C(X_g + a_w)| = |X_g| + 1 > |Y_g| = |C(Y_g \cup X_g)|,$$

и в то же время $X_g + a_w \subseteq Y_g \cup X_g$, что противоречит кардинальной монотонности. Если же $a_w \notin Y$, то

$$C(Y_g \cup X_g + a_w) = C(C(Y_g \cup X_g) + a_w) = C(Y_g + a_w),$$

а также $|C(Y_g + a_w)| \geq |C(X_g + a_w)| = |X_g| + 1$ (используя кардинальную монотонность для вложения $Y_g \cup X_g + a_w \supset X_g + a_w$). Тогда $C(Y_g + a_w) \neq Y_g$, и, следовательно, ребро a_w является блокирующим для Y (учитывая $a_w \neq y_w$); противоречие.

Таким образом, имеет место случай (б). Предположим теперь, что $b \in Y$. Тогда $C(Y_g \cup X_g + a_w) = C(Y_g + a_w)$, и в то же время

$$C(Y_g \cup X_g + a_w) = C((Y_g - b) \cup X_g + a_w) = C((Y_g - b) \cup C(X_g + a_w)) = C((Y_g - b) \cup (X_g + a_w - b)).$$

Поскольку оба операнда в последнем объединении не содержат b, получаем $b \notin C(Y_g + a_w)$. Но тогда $C(Y_g + a_w) \subseteq Y_g + a_w - b \neq Y_g$, что дает противоречие как в случае $a_w \in Y$, так и в случае $a_w \notin Y$ (где можно видеть, что a_w блокирует Y). Таким образом, $b \notin Y$. Указанные сравнения для X_g, $Z = X_g + a_w - b$ и Y_g легко следуют. Факт доказан.

Пусть $b = w'g$. Из факта следует, что ребро b ассоциировано (образует связку) с a_w, и что вершина w' инцидентна ребру $y_{w'} \in Y$, отличному от $b = x_{w'} \in X$. Тогда выполняется $x_{w'} >_{w'} y_{w'}$ (ввиду $X >_W Y$), и мы можем применить к паре $(x_{w'}, y_{w'})$ те же самые рассуждения, что применялись ранее к паре (x_w, y_w).

Продолжая данный процесс и далее, мы получаем "неограниченный" путь из чередующихся W-активных и F-активных ребер для X. В нем каждая пара соседних ребер, инцидентных вершине f в F, скажем, $e, e' \in E_f$, образует связку, для которой выполняется $e \notin X_f \ni e'$, и множество $Z := X_f + e - e'$ удовлетворяет $Y_f \succeq_f Z$. Выделяя в этом пути участок между двумя попаданиями в одну и ту же вершину в W, мы получаем цикл, являющийся ротацией L, определяющей искомый матчинг $X' := (X - L^-) \cup L^+$ (где L^+ и L^- — множества W-активных и F-активных ребер в L, соответственно). Здесь все вершины в $W \cap V_L$ различные, и из построения следует, что для каждой такой вершины w выполняется $x_w >_w x'_w \geq_w y_w$. (Что касается вершин в $F \cap V_L$, каждая такая вершина f может быть пройдена циклом L несколько раз, что порождает непересекающиеся по ребрам связки; используя лемму 3.1 и факт выше, можно видеть, что $X_f \prec_f X'_f \preceq_f Y_f$.)

Предложение 3.2 доказано.

4. ПОСЕТ РОТАЦИЙ

В этом разд. устанавливаются важные дополнительные свойства ротаций, которые приводят к построению посета ротаций.

Пусть $\mathcal{T}$ — последовательность матчингов $X_0, X_1, \ldots, X_N$, где X_0 стабильное, и каждое X_i получается из X_{i-1} применением (или *сдвигом вдоль*) ротации $L_i \in \mathcal{L}(X_{i-1})$, т.е. $X_i = (X_{i-1} - L_i^-) \cup L_i^+$. Тогда, в силу предложения 3.1, все матчинги X_i являются стабильными, и справедливо $X_0 \prec X_1 \prec \cdots \prec X_N$ (где $\prec = \prec_F$). Такую последовательность $\mathcal{T}$ мы называем *трассой*, идущей из X_0 в X_N. Множество ротаций $\{L_1, \ldots, L_N\}$ обозначим $\mathcal{R}(\mathcal{T})$. Можно видеть, что

(4.1)

(i) число матчингов в любой трассе $\mathcal{T}$ не превышает $|E|$;

(ii) для каждого стабильного матчинга X найдется трасса, идущая из минимального матчинга $X^{\min}$ (наихудшего для F и наилучшего для W) в максимальный матчинг $X^{\max}$ и проходщая через X.

Действительно, если X_i получается применением ротации к X_{i-1}, то для каждой вершины $w \in W$, где $(X_i)_w$ отличается от $(X_{i-1})_w$, инцидентное матчинговое ребро становится менее предпочтительным. Это дает (i) (и даже оценку $|\mathcal{T}| \le |E|/2$). В свою очередь (ii) легко следует из Предложения 3.2.

Также, применяя лемму 3.1, легко показать коммутируемость ротаций в активном графе $\Gamma(X)$. Более точно:

для любого подмножества $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}(X)$ матчинг X', получаемый из X удалением ребер из $\cup(L^-\colon L \in \mathcal{L}')$ и добавлением ребер из $\cup(L^+\colon L \in \mathcal{L}')$ является стабильным, и каждое $L' \in \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}$ является ротацией в $\Gamma(X')$; в частности, ротации в $\mathcal{L}(X)$ могут применяться в произвольном порядке. (4.2)

Это позволяет получить следующее важное свойство инвариантности множества ротаций для трасс, соединяюших фиксированные матчинги (впервые свойство такого рода было получено в [11] для классических стабильных марьяжей и затем было показано рядом авторов для более общих моделей стабильности).

Лемма 4.1. *Пусть $X, Y \in \mathcal{S}$ и $X \prec Y$. Тогда для всех трасс $\mathcal{T}$, идущих из X в Y, множество ротаций $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ одно и то же.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{X}$ множество стабильных матчингов X' таких, что $X \preceq X' \preceq Y$. Мы знаем, что множество трасс, идущих из $X' \in \mathcal{X}$ в Y непусто (в силу предложения 3.2). Скажем, что матчинг $X' \in \mathcal{X}$ является *особым*, если найдутся две трассы $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ из X' в Y такие, что $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \ne \mathcal{R}(\mathcal{T}')$. Надо показать, что матчинг X неособый (при фиксированном Y).

Предположим, что это не так, и рассмотрим особый матчинг $X' \in \mathcal{X}$ максимальный в том смысле, что любой матчинг $Z \in \mathcal{X}$ такой, что $X' \prec Z \preceq Y$, уже не является особым. В любой трассе из X' в Y первый после X' матчинг Z получается из X' применением некоторой ротации из $\mathcal{L}(X')$. Поэтому из выбора X' следует, что найдутся две ротации $L, L' \in \mathcal{L}(X')$ такие, что матчинги Z и Z', полученные из X' применением L и L' (соответственно) являются неособыми, но имеются трасса $\mathcal{T}$ из X' в Y, проходящая через Z, и трасса $\mathcal{T}'$ из X' в Y, проходящая через Z', для которых $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \ne \mathcal{R}(\mathcal{T}')$.

В то же время, поскольку ротации L и L' коммутируют (ср. (4.2)), L является ротацией для Z', а L' – ротацией для Z. Поэтому есть две трассы $\widetilde{\mathcal{T}}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}'$ из X' в Y такие, что $\widetilde{\mathcal{T}}$ начинается с X', Z, Z'', а $\widetilde{\mathcal{T}}'$ начинается с X', Z', Z'', а затем эти трассы совпадают; здесь Z'' получается из Z применением L' или, эквивалентно, получается из Z' применением L. Тогда $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{T}}')$. В силу неособости Z и Z' должно выполняться $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{T}}') = \mathcal{R}(\mathcal{T}')$. Но тогда получаем $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{R}(\mathcal{T}')$; противоречие.

Лемма 4.1 доказана.

Назовем трассу, идущую из $X^{\min}$ в $X^{\max}$ *полной*. Согласно лемме 4.1, для всех полных трасс $\mathcal{T}$ множество ротаций $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ одно и то же; будем обозначать его через $\mathcal{R}$ (таким образом, $\mathcal{R}$ состоит из всех возможных ротаций, применимых к матчингам в $\mathcal{S}$). Известный метод сравнения ротаций, первоначально указанный в [11], подходит и для нашей модели КБМ и позволяет задать на $\mathcal{R}$ структуру посета.

Определение 3. Для ротаций $R, R' \in \mathcal{R}$ скажем, что R предшествует R' и обозначим это как $R \lessdot R'$, если в каждой полной трассе ротация R *применяется раньше*, чем ротация R'.

Это бинарное отношение является транзитивным и антисимметричным и задает частичный порядок на $\mathcal{R}$; мы называем $(\mathcal{R}, \lessdot)$ *посетом ротаций* для G. Тесная связь этого посета со стабильными матчингами позволяет получить “компактное описание” решетки $(\mathcal{S}, \prec)$ (в духе работы Биркхофа [10], где произвольная конечная дистрибутивная решетка представляется в виде решетки идеалов посета).

Более точно, для каждого $X \in \mathcal{S}$ возьмем трассу $\mathcal{T}$ из $X^{\min}$ в X и обозначим множество ротаций $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ через $\omega(X)$. Это множество не зависит от выбранной трассы, и для $R, R' \in \mathcal{R}$ из $R \lessdot R'$ и $R' \in \omega(X)$ следует $R \in \omega(X)$, т.е. $\omega(X)$ является *идеалом* посета $(\mathcal{R}, \lessdot)$. Верно и обратное, и более того, отображение ω дает изоморфизм решеток.

Предложение 4.1. *Соответствие $X \mapsto \omega(X)$ устанавливает изоморфизм между решеткой стабильных матчингов $(\mathcal{S}, \prec_F)$ и решеткой $(\mathcal{I}, \subset)$ идеалов посета $(\mathcal{R}, \lessdot)$ (где точные нижняя и верхняя грани для $I, I' \in \mathcal{I}$ – это $I \cap I'$ и $I \cup I'$, соответственно).*

Доказательство. Рассмотрим стабильные матчинги $X, Y \in \mathcal{S}$ и возьмем их структурное пересечение (“meet”) $M := X \curlywedge Y$ и структурное объединение (“join”) $J := X \curlyvee Y$ в решетке $(\mathcal{S}, \prec)$. Основная часть доказательства состоит в том, чтобы установить соотношения

$$\omega(X) \cap \omega(Y) = \omega(M) \quad \text{и} \quad \omega(X) \cup \omega(Y) = \omega(J); \tag{4.3}$$

иными словами, нужно показать, что ω определяет гомоморфизм рассматриваемых решеток.

Покажем левое равенство в (4.3). Для этого применим метод доказательства предложения 3.2, рассматривая пару $M \prec X$ и пару $M \prec Y$. Пусть W_1 (W_2) — множество вершин $w \in W$, где $M_w \neq X_w$ (соответственно, $M_w \neq Y_w$). Мы утверждаем, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Чтобы это показать, следуя доказательству предложения 3.2, выберем произвольную начальную вершину $w \in W_1$, для которой выполняется $m_w >_w x_w$ (где $\{m_w\} = M_w$ и $\{x_w\} = X_w$), и построим соответствующий чередующийся путь P в графе допустимости $D(M)$ с началом w до первого зацикливания, получая ротацию $L \in \mathcal{L}(M)$. Тогда для $M' := (M - L^-) \cup L^+$ выполняется $M \prec M' \preceq X$. Заметим, что путь P и ротация L строятся канонически, они определяются только графом $D(M)$ и начальной вершиной w (и в остальном не зависят от X).

В случае $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, взяв общую вершину $w \in W_1 \cap W_2$, мы получили бы одну и ту же ротацию для обеих пар (M, X) и (M, Y). Но тогда для X и Y мы имели бы нижнюю грань большую, чем M (а именно, M' как выше); противоречие.

Следовательно, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Продолжая построение по указанному методу для пары (M, X), мы получим трассу $\mathcal{T}$ из M в X такую, что для каждого промежуточного матчинга $\widetilde{M}$ множество вершин $w \in W$, где $\widetilde{M}_w \neq X_w$, является подмножеством в W_1. И аналогично для трассы $\mathcal{T}'$ из M в Y и множества W_2. Отсюда следует, что $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{T}') = \emptyset$. Поскольку $\omega(X) = \omega(M) \cup \mathcal{R}(\mathcal{T})$ и $\omega(Y) = \omega(M) \cup \mathcal{R}(\mathcal{T}')$, мы получаем требуемое левое равенство в (4.3).

Доказательство правого равенства в (4.3) симметричное (оно может проводиться путем перехода от $\prec_F$ к $\prec_W$ и обращением ротационных преобразований).

Теперь требуемое утверждение легко следует из того факта, что для ротаций $R, R' \in \mathcal{R}$ отношение $R \lessdot R'$ не выполняется тогда и только тогда, когда найдется стабильный матчинг X, для которого $R' \in \omega(X) \not\ni R$. (Иными словами, решетка $(\mathcal{S}, \prec)$ не может быть "более крупной", чем решетка $(\mathcal{I}, \subset)$.)

Предложение 4.1 доказано.

Как следствие, множество $\mathcal{S}$ биективно множеству $\mathcal{A}$ анти-цепей посета $(\mathcal{R}, \lessdot)$. (Напомним, что *анти-цепь* в посете $(P, <)$ — это множетсво A попарно несравнимых элементов. Оно определяет идеал $\{p \in P\colon\ \exists a \in A \mid p \leq a\}$, и определяется идеалом, для которого A — множество максимальных элементов.)

5. ПОСТРОЕНИЯ

Как указывалось выше (ср. (4.1)(i)), число ротаций $|\mathcal{R}|$ не превосходит числа ребер $|E|$ рассматриваемого графа; поэтому посет ротаций (как граф) имеет размер $O(|E|^2)$. (Помимо этого, можно видеть, что ротации попарно не пересекаются по ребрам одного знака; следовательно, суммарное число ребер в ротациях не выше $2|E|$.) В свете леммы 4.1, нахождение множества $\mathcal{R}$ не представляет большого труда, если известен начальный (наименее выгодный для F) стабильный матчинг $X^{\min}$; а именно, достаточно построить произвольную полную трассу, идущую из $X^{\min}$ (детали такого построения будут уточнены позднее). Менее тривиальной выглядит задача нахождения отношения предшествования $\lessdot$ на ротациях, которое было определено неявно, путем рассмотрения всего множества полных трасс. Мы начнем этот раздел с изложения эффективного метода определения этого отношения и затем рассмотрим вопросы эффективного построения других упомянутых структур.

5.1. Построение порождающего графа для $(\mathcal{R}, \lessdot)$

Ротация $R \in \mathcal{R}$ называется *непосредственно предшествующей* ротации $R' \in \mathcal{R}$, если $R \lessdot R'$ и нет такого $R'' \in \mathcal{R}$, что $R \lessdot R'' \lessdot R'$. Обозначим через $H = (\mathcal{R}, \mathcal{E})$ ориентироваввный граф, в котором множество ребер $\mathcal{E}$ образовано всеми парами (R, R'), где R непосредственно предшествует R'; иными словами, H — это диаграмма Хассе посета $(\mathcal{R}, \lessdot)$. Граф H определяет данный посет (через достижимость ориентированными путями) и может заменять посет при работе с приложениями.

Эффективное построение графа H опирается на следующий простой факт.

Лемма 5.1. *Для $R \in \mathcal{R}$ обозначим $I^{\max}_{-R}$ максимальный идеал в $(\mathcal{R}, \lessdot)$, не содержащий R. Положим $I' := I^{\max}_{-R} \cup \{R\}$. Ротация R непосредственно предшествует ротации R' тогда и только тогда, когда R' является минимальным элементом, не содержащимся в I'.*

Доказательство. Заметим, что $I^{\max}_{-R}$ является дополнением до $\mathcal{R}$ множества ("фильтра") Φ_R, образованного ротациями $\widetilde{R}$ большими или равными R (т.е. $R \lessdot \widetilde{R}$ или $R = \widetilde{R}$). Ясно, что минимальные элементы в $\Phi_R - \{R\}$ — это в точности те элементы R', для которых R является непосредственно предшествующим. Эти R' составляют множество минимальных элементов вне идеала I'. Лемма доказана.

Для $R \in \mathcal{R}$ обозначим через $\mathcal{I}^+_R$ множество ротаций, непосредственно следующих за R. Основываясь на предложении 4.1 и лемме 5.1, мы можем эффективно строить множество $\mathcal{I}^+_R$ следующим образом (при условии, что известен матчинг $X^{\min}$).

Построение $\mathcal{I}^+_R$. Начиная с $X^{\min}$, последовательно выстраиваем трассу $\mathcal{T}$, используя все возможные ротации, кроме R. А именно, на очередном шаге для текущего матчинга X находим множество ротаций $\mathcal{L}(X)$, ассоциированных с X (см. раздел 3.2), выбираем произвольную ротацию $L \in \mathcal{L}(X)$, отличную от R, и сдвигаем X вдоль L, получая новый текущий матчинг X'. В случае $\mathcal{L}(X) = \{R\}$ первая фаза процедуры заканчивается.

Вторая фаза процедуры состоит в сдвиге полученного X вдоль R. Множество $\mathcal{L}(X')$ ротаций, ассоциированных с полученным при сдвиге матчинге X', выдается как искомое множество $\mathcal{I}^+_R$.

(Нетрудно видеть, что при завершении первой фазы текущий матчинг X соответствует идеалу $I = I^{\max}_{-R}$, т.е. $\omega(X) = I$. Факт совпадения $\mathcal{I}^+_R$ с $\mathcal{L}(X')$ также очевиден.)

“Незамысловатый” алгоритм, использующий эту процедуру, состоит из $|\mathcal{R}|$ *больших итераций*, каждая из которых рассматривает очередную ротацию R в списке всех ротаций. (Заметим, что нет нужды строить этот список заранее, он может формироваться по ходу выполнения больших итераций. Список начинается с множества $\mathcal{L}(X^{\min})$.) На каждой большой итерации многократно решается следующая базовая задача:

(P): для заданного $X \in \mathcal{S}$ построить активный граф $\Gamma(X)$ и выделить в нем множество ротаций $\mathcal{L}(X)$.

Для построения $\Gamma(X)$ просматриваются вершины $w \in W$, и для каждого w сканируются ребра $wf \in E_w$ в порядке убывания предпочтения $>_w$, начиная с ребра, следующего за x_w. Для каждого ребра $e = wf$ определяется, является ли оно интересным для f при X (путем вычисления $C_f(X_f + e)$ и сравнения с X_f), и первое интересное ребро (если таковое найдется) объявляется W-активным ребром a_w. Попутно определяются F-активные ребра и строятся связки. Это дает допустимый граф $D(X)$. Процедуры очистки графа $D(X)$ и разложения очищенного активного графа $\Gamma(X)$ на ротации рутинные, и могут выполняться за линейное время $O(|E|)$. Как следствие,

решение задачи (P) сводится к выполнению $O(|E|)$ стандартных операций плюс $O(|E|)$ обращениям к “оракулам” C_f $(f \in F)$. (5.1)

(Здесь и далее мы предполагаем, что функции выбора C_f задаются неявно при помощи “оракула”, который для опрашиваемого аргумента $Z \subseteq E_f$ сообщает значение $C_f(Z)$; считается, что такая операция занимает $O(1)$ оракульного времени.)

Бесхитростное построение множества $\mathcal{I}^+_R$ для фиксированного R сводится к независимому решению $O(|E|)$ задач (P) (где каждая задача касается элемента строящейся трассы $\mathcal{T}$), поэтому временные показатели, указанные в (5.1), следует умножить на $O(|E|)$. Однако этот процесс можно ускорить. Для этого в каждой вершине $w \in W$ следует запоминать последнее просканированное ребро $e = wf$ на предыдущих шагах. Если это ребро было активным и участвовало в примененной ротации, то дальнейшее сканирование в E_w следует начинать с ребра, следующего по порядку за e. Если же оно не использовалось при ротации, то оно остается активным на текущем шаге. Это обосновывается при помощи леммы 3.1, из которой следует, что если ротация L входила в $\mathcal{L}(X)$ для X на некотором шаге, но не была применена, то она остается действующей ротацией на последующих шагах, пока не будет применена.

Это дает улучшенную процедуру построения $\mathcal{I}^+_R$, при которой каждое ребро в E_w сканируется не более одного раза, и поэтому вся процедура для одного $R \in \mathcal{R}$ выполнима за стандартное время $O(|E|)$ и аналогичное оракульное время. Отсюда при переборе по $\mathcal{R}$ получаем

Предложение 5.1. *При наличии матчинга $X^{\min}$ нахождение минимального порождающего графа (диаграммы Хассе) $H = (\mathcal{R}, \mathcal{E})$ для посета ротаций $(\mathcal{R}, \lessdot)$ осуществимо за время $O(|E|^2)$ (включая оракульное время).*

5.2. Построение начального матчинга $X^{\min}$

Чтобы сконструировать $X^{\min}$, можно воспользоваться методом в [17, Sec. 3.1], приспособленным для более широкого класса моделей стабильности на двудольных графах. Ниже мы даем его описание применительно к нашей модели КБМ. Альтернативный метод, основанный на классической технике “отложенных принятий” (deferred acceptance), излагается в [14, Sec. 4.1].

На итерациях алгоритма построения $X^{\min}$ последовательно конструируются тройки множеств (B^i, X^i, Y^i), $i = 0, 1, \dots, i, \dots$. В начале полагается $B^0 := E$. На входе очередной i-й итерации имеется множество $B^i \subseteq E$ (уже известное), которое преобразуется на двух стадиях итерации.

На 1-*й стадии* итерации B^i преобразуется в $X^i \subseteq E$ применением оператора C_w к каждому ограничению $B^i_w = B^i|_{E_w}$ $(w \in W)$, т.е. X^i – это матчинг, для которого $X^i_w = C_w(B^i_w)$. Иными словами, в нашей модели с линейными предпочтениями и единичными квотами в W для каждой вершины $w \in W$ в множестве B^i_w выбирается наиболее предпочтительное (относительно $>_w$) ребро e, и полагается $X^i_w := \{e\}$. В случае $B^i_w = \emptyset$, полагается $X^i_w := \emptyset$ (и вершина w будет дефицитной). Таким образом, X^i удовлетворяет квотам во всех вершинах доли W.

На 2-*й стадии* итерации полученный матчинг X^i трансформируется в $Y^i \subseteq E$ применением оператора C_f к каждому ограничению $X^i_f = X^i|_{E_f}$ ($f \in F$), т.е. Y^i — это матчинг, для которого $Y^i_f = C_f(X^i_f)$. (Следовательно, Y^i приемлемое для всех вершин; однако оно не обязано быть стабильным.)

Полученные множества X^i, Y^i затем используются при генерации множества B^{i+1} для следующей итерации. А именно:

B^{i+1} состоит из всех $e \in E$ таких, что $e \in B^i$, и либо $e \in X^i \cap Y^i$, либо $e \notin X^i \cup Y^i$ (иначе говоря, $e \in B^i$ не попадает в B^{i+1}, если e принадлежит X^i и не принадлежит Y^i). (5.2)

Затем B^{i+1} преобразуется в X^{i+1} и Y^{i+1} как указано выше, и т.д. Процесс заканчивается, когда на текущей, p-й, итерации получаем равенство $Y^p = X^p$ (эквивалентно, $B^{p+1} = B^p$). Можно видеть, что $B^0 \supset B^1 \supset \cdots \supset B^p$, поэтому процесс конечен и число итераций не превосходит $|E|$.

Из доказанного в [17] следует

Предложение 5.2. *Полученный матчинг X^p стабильный и оптимальный для W, т.е. $X^p = X^{\min}$.*

Следует заметить, что для рассматриваемой в [17] общей модели, которая может иметь дело с вещественными функциями на E, процесс преобразования соответствующих функций (b^i, x^i, y^i) может быть бесконечным, но всегда сходится к некоторой тройке $(\widehat{b}, \widehat{x}, \widehat{y})$, удовлетворяющей $\widehat{x} = \widehat{y}$. Доказывается (в Теоремах 1 и 2 в [17]), что предельная функция $\widehat{x}$ стабильная и оптимальная для соответствующей доли вершин. В нашем частном булевом случае мы получаем предложение 5.2.

На i-й итерации алгоритма множество X^i формируется из B^i за $O(|W|)$ (“амортизационных”) действий, путем взятия первых элементов в ограничениях B^i_w, $w \in W$. Множества X^i_f для всех $f \in F$ можно также сформировать за $O(|W|)$ действий, и оператор C_f применяется к каждому X^i_f не более одного раза (вычисляя Y^i_f). С учетом этого, имплементацию алгоритма можно организовать так, чтобы получить следующие оценки сложности:

матчинг $X^{\min}$ строится за время $O(|E||V|)$ (включая оракульное время). (5.3)

Это вместе с предложением 5.1 дает следующий результат.

Теорема 5.1. *Посет ротаций $(\mathcal{R}, \lessdot)$ может быть построен за время $O(|E|^2)$ (включая оракульное время).*

Замечание 2. Построение ротаций и их посета нетрудно перенести на КБМ с графом $G = (V, E)$, содержащим кратные ребра. Для этого используется редукция к графу $G' = (V', E')$ без кратных ребер путем замены ребер e подграфами K_e как указано в замечании 1 (в разд. 2); здесь множество U заменяемых ребер содержит по крайней мере одно ребро из каждой пары кратных ребер. Стабильные матчинги в G' назовем *родственными*, если они отличаются только на некоторых циклах O_e для $e \in U$ (учитывая случай (∗), отмеченный в замечании 1). Тогда множество $\mathcal{S}$ стабильных матчингов для G изоморфно множеству классов родственности в множестве стабильных матчингов для G'. В соответствии с этим, множество $\mathcal{R}'$ ротаций для G' делится на два подмножества $\mathcal{R}'_1$ и $\mathcal{R}'_2$, где каждая ротация в $\mathcal{R}'_2$ соответствует циклу O_e для некоторого $e \in U$. Можно видеть, что если при построении трассы в G' применяется ротация, содержащая ребро из K_e для некоторого $e \in U$, то значения матчинга стабилизируются на K_e, т.е. никакая из последующих ротаций уже не использует ребер из K_e. (Это следует из структуры K_e и монотонности изменений на всех ребрах, а именно, если при ротации ребро перестает быть матчинговым, то оно остается таковым в дальнейшем.)

Как следствие, каждая ротация в $\mathcal{R}'_2$ является максимальным элементом посета $(\mathcal{R}', \lessdot')$. В свою очередь, ротации для G взаимно однозначно соответствуют элементам в $\mathcal{R}'_1$ (являясь образами последних при замене подграфов K_e ребрами e), и посет ротаций $(\mathcal{R}, \lessdot)$ для G изоморфен ограничению посета $(\mathcal{R}', \lessdot')$ на $\mathcal{R}'_1$. Так как $|E'| < 8|E|$, посет для G строится за время $O(|E|^2)$, ввиду теоремы 5.1.

6. АФФИННАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ И СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

Биекция ω, представленная в предложении 4.1, позволяет показать аффинную представимость решетки $(\mathcal{S}, \prec_F)$, по аналогии с тем, как это делается в [14] для общей булевой задачи или в [20] для задачи о стабильных распределениях.

Напомним, что каждая ротация $R \in \mathcal{R}$ возникает как цикл определенного активного графа $\Gamma(X)$, и множество ее ребер имеет фиксированное разбиение, обозначаемое (R^+, R^-) и состоящее из W- и F-активных ребер, соответственно. Мы ассоциируем с R характеристический вектор $\beta^R \in \mathbb{R}^E$, принимающий значение 1 для $e \in R^+$, -1 для $e \in R^-$, и 0 для остальных ребер.

Помимо пространства $\mathbb{R}^E$, мы также будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ с координатами, индексируемыми ротациями; в этом случае мы будем обозначать единичный базисный вектор, соответствующий ротации R, как $\langle R \rangle$.

Для подмножества $X \subseteq E$ его характеристический 0,1 вектор в $\mathbb{R}^E$ будет обозначаться как $\chi^X = \chi^X_E$, и аналогично, для подмножества $I \subseteq \mathcal{R}$ его характеристический 0,1 вектор в $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ будет обозначаться как $\chi^I = \chi^I_{\mathcal{R}}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{E\times\mathcal{R}}$ – матрица, столбцы которой образованы векторами β^R, $R \in \mathcal{R}$. Из предложения 4.1 следует, что

отображение $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}} \overset{\gamma}{\longmapsto} x \in \mathbb{R}^E$, где x определяется как $\chi^{X^{\min}} + A\lambda$, порождает биекцию между характеристическими векторами $\chi^I_{\mathcal{R}}$ идеалов I посета $(\mathcal{R}, \lessdot)$ и характеристическими векторами χ^X_E стабильных матчингов $X \in \mathcal{S}$. (6.1)

(Здесь γ соответствует естественному расширению отображения ω^{-1} из предложения 4.1.)

Согласно описаниям в разд. 5, матрица A может быть построена эффективно за время $O(|E|^2)$. Благодаря этому, аффинная представимость для решетки $(\mathcal{S}, \prec_F)$, выраженная в (6.1) (где порядок $\prec_F$ согласуется с вложением $\subset$ в решетке идеалов для $(\mathcal{R}, \lessdot)$), может применяться для сведения определенных задач о стабильных матчингах к “более простым” задачам на идеалах посета ротаций.

Прежде всего отметим, что аффинное отображение γ в (6.1) переводит выпуклую оболочку $\mathrm{conv}(\mathcal{I}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ множества $\mathcal{I}$ идеалов посета ротаций в выпуклую оболочку $\mathrm{conv}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^E$ множества стабильных матчингов $\mathcal{S}$. (Здесь мы для простоты изложения отождествляем идеалы посета и стабильные матчинги с их характеристическими векторами.) Многогранник $\mathrm{conv}(\mathcal{I})$ полноразмерный (поскольку каждый единичный базисный вектор $\langle R\rangle$ ($R \in \mathcal{R}$) может быть выражен как разность характеристических векторов двух идеалов в $\mathcal{I}$). Он описывается неравенствами

$$0 \le \lambda(R) \le 1, \quad R \in \mathcal{R}; \tag{6.2}$$

$$\lambda(R) \ge \lambda(R'), \quad R, R' \in \mathcal{R}, \quad R \lessdot R'. \tag{6.3}$$

Эта линейная система соответствует описанию *порядкового многогранника* (order polytope) $\mathcal{P}_Q$ для конечного посета Q в работе Стэнли [15]; в нашем случае $Q = (\mathcal{R}, \lessdot)$ и $\mathcal{P}_Q = \mathrm{conv}(\mathcal{I})$. Гиперграни (facets) в $\mathrm{conv}(\mathcal{I})$ выражаются неравенствами трех видов:

(а) $\lambda(R) \le 1$ для минимальных R; (б) $\lambda(R) \ge 0$ для максимальных R; и (в) $\lambda(R) \ge \lambda(R')$, где R непосредственно предшествует R'. (6.4)

Что касается вершин, то

вершины в $\mathrm{conv}(\mathcal{I})$ взаимно однозначно соответствуют идеалам в $\mathcal{I}$. (6.5)

(Действительно, каждый идеал $I \in \mathcal{I}$ определяет вершину в $\mathrm{conv}(\mathcal{I})$, поскольку χ^I – единственный вектор, максимизирующий скалярное произведение $a\chi^{I'}$ по всем идеалам $I' \in \mathcal{I}$, где a принимает значение 1 на ротациях $R \in I$, и значение -1 на ротациях $R \in \mathcal{R} - I$. Обратное очевидно.)

Важное свойство отображения γ в (6.1) следует из того, что

матрица A имеет полный столбцовый ранг. (6.6)

Этот факт был показан в [14, Th. 1.4] для общего булевого случая (где ФВ для всех вершин подчиняются аксиомам (A1),(A2),(A3)). Доказательство этого для нашей модели КБМ довольно простое, и для полноты изложения, мы его приводим.

Доказательство (6.6). Положим $N := |\mathcal{R}|$ и перенумеруем ротации как $R(1), \dots, R(N)$, соблюдая правило: из $R(i) \lessdot R(j)$ следует $i < j$ (упорядочение такого рода известно под названием “топологической сортировки” вершин ациклического ориентированного графа). Для каждого $i = 1, \dots, N$ в $R(i)$ выделим одно ребро в “отрицательной” части $R(i)^-$, которое обозначим как e_i. Для полученных нумераций справедливо следующее:

(а) все ребра $e_1, \dots, e_N$ различные; и (б) для любых $1 \le i < j \le N$ значение $\beta^{R(j)}$ на ребре e_i равно 0. (6.7)

Эти свойства следуют из того, что для ротации R, строящейся в активном графе $\Gamma(X)$ матчинга X, в каждой вершине $w \in W$, принадлежащей R, матчинговое ребро $e = wf \in X$ более предпочтительное, чем активное ребро $a = wf'$, т.е. $e >_w a$. Мы имеем $e \in R^-$ и $a \in R^+$, и при применении ротации R к X матчинговое ребро e меняется на a (так сказать “сдвигается вправо”). Поэтому при построении любой трассы после использования ротации R каждая последующая ротация не может содержать ребро e. Отсюда следуют оба свойства в (6.7). (Фактически можно наблюдать следующее: любое ребро e принадлежит не более двум ротациям, и если e принадлежит $R(k)$ и $R(i)$ при $k < i$, то эти ротации сравнимы, т.е. выполняется $R(k) \lessdot R(i)$, и при этом $e \in R(k)^+$ и $e \in R(i)^-$.)

Теперь переставим столбцы и строки матрицы A так, чтобы столбцы $\beta^{R(i)}$ шли по возрастанию индекса i (слева-направо), и первые N строк соответствовали ребрам $e_1, \ldots, e_N$, следующих по возрастанию их индексов (сверху-вниз). Тогда из (6.7) следует, что подматрица, образованная первыми N строками, является нижне треугольной с коэффициентами -1 на диагонали. Это дает (6.6).

Из (6.1) и (6.6) получаем

Следствие 6.1. $\dim(\mathrm{conv}(\mathcal{S})) = \dim(\mathrm{conv}(\mathcal{I})) = |\mathcal{R}|$, *и многогранник* $\mathrm{conv}(\mathcal{S})$ *аффинно конгруэнтен порядковому многограннику* $\mathrm{conv}(\mathcal{I})$ *посета* $(\mathcal{R}, \lessdot)$.

В частности, вершины $\mathrm{conv}(\mathcal{S})$ образованы всеми стабильными матчингами в $\mathcal{S}$ и взаимно однозначно соответствуют идеалам в $\mathcal{I}$, многогранник $\mathrm{conv}(\mathcal{S})$ имеет $O(|\mathcal{R}|^2)$ гиперграней, все они являются образами при γ гиперграней в $\mathrm{conv}(\mathcal{I})$ (указанными в (6.4)) и могут быть эффективно выписаны.

В завершении этого раздела мы рассматриваем *задачу о стабильном матчинге минимальной стоимости*:

$$\text{для заданных } \textit{стоимостей } c(e) \in \mathbb{R} \text{ ребер } e \in E \text{ найти стабильный матчинг } X \in \mathcal{S} \text{ минимальной общей стоимости } c(X) := \textstyle\sum_{e \in E} c(e). \tag{6.8}$$

Заметим, что поскольку все стабильные матчинги X имеют одинаковый размер $|X|$, функция c может задаваться с точностью до константы; в частности, можно считать c положительной. Заменяя c на $-c$, мы получаем эквивалентную задачу максимизации $c(X)$ среди $X \in \mathcal{S}$.

Эффективный метод, разработанный в [12] для решения задачи минимизации линейной функции на множестве стабильных марьяжей и впоследствии успешно примененный рядом авторов для некоторых других моделей стабильности, состоит в сведении к задаче линейной минимизации на множестве идеалов соответствующего посета ротаций (в предположении, что такой посет существует и может быть эффективно построен), и затем последняя задача сводится методом Пикара [13] к классической задаче о минимальном разрезе ориентированного графа. Для полноты изложения мы далее описываем метод решения задачи (6.8) для нашего случая (придерживаясь описания в работе [21]).

Вначале вычисляется стоимость $c\beta^R$ $(= c(R^+) - c(R^-))$ каждой ротации $R \in \mathcal{R}$. Тогда для каждого $X \in \mathcal{S}$ и соответствующего идеала $I := \omega(X)$ имеем

$$c(X) = c(X^{\min}) + \sum (c\beta^R : R \in I).$$

Это позволяет перейти к следующей задаче для ротаций R с весами (стоимостями) $\zeta(R) := c\beta^R$:

$$\text{найти идеал } I \in \mathcal{I} \text{ посета } (\mathcal{R}, \lessdot), \text{ минимизирующий общий вес } \zeta(I) := \textstyle\sum (\zeta(R) : R \in I). \tag{6.9}$$

Удобно слегка расширить постановку последней задачи, рассматривая произвольный конечный ориентированный граф $H = (V_H, E_H)$ и функцию весов $\zeta : V_H \to \mathbb{R}$. Требуется найти замкнутое множество вершин $X \subseteq V_H$ минимального веса $\zeta(X)$; назовем это *задачей* $(*)$. Здесь множество X называется *замкнутым*, если в H нет ребер, идущих их $V_H - X$ в X. (Ясно, что в соответствующем графе посета замкнутые множества — это идеалы.)

Следуя [13], задача $(*)$ сводится к задаче о минимильном разрезе ориентированного графа $\widehat{H} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ с функцией пропускных способностей ребер h, которые получаются из H, ζ при:

(а) добавлении двух вершин: “источника” s и “стока” t;

(б) добавлении множества E^+ ребер (s, v) для всех вершин v, принадлежащих $V^+ := \{v \in V_H : \zeta(v) > 0\}$;

(в) добавлении множества E^- ребер (u, t) для всех вершин u, принадлежащих $V^- := \{u \in V_H : \zeta(u) < 0\}$;

(г) назначении пропускных способностей $h(s, v) := \zeta(v)$ для $v \in V^+$, $h(u, t) := |\zeta(u)|$ для $u \in V^-$, и $h(e) := \infty$ для всех $e \in E_H$.

Напомним, что под *s–t разрезом* в $\widehat{H}$ понимается множество направленных ребер $\delta(A)$, идущих из подмножества вершин $A \subset \widehat{V}$ такого, что $s \in A \not\ni t$, в его дополнение $\widehat{V} - A$, и пропускной способностью этого разреза считается величина $h(\delta(A)) := \sum (h(e) : e \in \delta(A))$. Можно видеть, что $\delta(A)$ имеет минимальную пропускную способность среди всех s–t разрезов тогда и только тогда, когда $X := V_H - A$ — замкнутое множество минимального веса $\zeta(X)$ в H.

Действительно, для s–t разреза $\delta(A)$ величина $h(\delta(A))$ является конечной тогда и только тогда, когда $\delta(A)$ не содержит ребер из H (учитывая бесконечную пропускную способность последних). Отсюда следует, что $\delta(A) \subseteq E^+ \cup E^-$, и что множество X замкнутое. Тогда

$$h(\delta(A)) = h(\delta(A) \cap E^+) + h(\delta(A) \cap E^-) = \zeta(X \cap V^+) + \sum (|\zeta(u)| : u \in (V_H - X) \cap V^-) =$$
$$= \zeta(X \cap V^+) + \zeta(X \cap V^-) - \zeta(V^-) = \zeta(X) - \zeta(V^-).$$

Таким образом, $\zeta(X)$ отличается от $h(\delta(A))$ на константу $\zeta(V^-)$, откуда следует требуемое свойство, и мы приходим к желаемому результату.

Теорема 6.1. *Задача о стабильном матчинге минимальной стоимости* (6.8) *для рассматриваемой модели КБМ разрешима в сильно полиномиальное время* (*оценивающее число стандартных и оракульных операций*).

7. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ КВОТЫ НА W

Выше мы описывали конструкции и доказывали утверждения в предположении, что в рассматриваемой комбинированной модели стабильности (КБМ) квоты всех вершин в доле W равны 1. Все это достаточно просто обобщается на случай произвольных квот $q(w) \in \mathbb{Z}_+$, $w \in W$, и ниже мы даем краткое изложение уточнений и изменений, оставляя аккуратную проверку деталей читателю как упражнение.

1) Прежде всего уточним конструкцию активного графа для стабильного матчинга $X \subseteq E$ (разд. 3.1). Ранее для полновесной вершины $w \in W^=$ мы обозначали x_w единственное ребро в $X_w = X \cap E_w$. Теперь, рассматривая полновесную вершину $w \in W$ (т.е. удовлетворяющую $|X_w| = q(w)$), мы обозначаем x_w последнее (наименее предпочтительное) ребро в X_w. Определения W-допустимого ребра a_w в E_w и связки (a_w, b_f^w) остаются прежними (как в (3.1) и (3.2)). Заметим, что, как и прежде, каждая вершина в W имеет не более одного W-допустимого ребра.

2) Как и прежде, в графе $D = D(X)$, определяемом направленными W- и F-допустимыми ребрами, для вершин $f \in F$ число входящих W-допустимых ребер (вида $a_w = (w, f)$) больше или равно числу выходящих F-допустимых ребер (вида $b = (f, w')$). (Здесь первое число превосходит второе, когда для входящего ребра $a_w = (w, f)$ выполняется $C_f(X_f + a_w) = X_f + a_w$ (и следовательно, a_w не порождает связку), или когда имеются две или более связки $(a, b), (a', b')$ с $b = b'$.) В то же время, для вершин $w \in W$ имеется одно выходящее W-допустимое ребро a_w, а число σ_w входящих F-допустимых ребер (f, w) может быть равно 0, 1 или более (последнее может возникнуть при $q(w) > 1$).

3) Процедура очистки остается дословно той же самой, она преобразует D в активный граф $\Gamma = \Gamma(X)$. Заметим, что для вершин w в $W_\Gamma := W \cap V_\Gamma$ процедура будет обеспечивать выполнение $|\delta^{\text{in}}(w)| \geq |\delta^{\text{out}}(w)| = 1$ (где $\delta^{\text{in}}(w)$ и $\delta^{\text{out}}(w)$ обозначают множества входящих и выходящих ребер в Γ, инцидентных w); в случае $\sigma_w > 1$ здесь априори допустимо строгое неравенство. Тем не менее, этого не происходит, и свойство (3.3) сохраняется в силу простых балансовых соотношений (ввиду того, что, как и прежде, $|\delta^{\text{in}}(v)| \geq |\delta^{\text{out}}(v)|$ для всех $v \in V_\Gamma$). Таким образом, как и прежде, Γ распадается на непересекающиеся по ребрам циклы-ротации, каждая вершина в W_Γ принадлежит ровно одной ротации, и любая ротация L проходит через каждую вершину в W_L ровно один раз, но может многократно проходить через одну и ту же вершину в F_L.

4) Лемма 3.1 остается справедливой, и ее доказательство не изменяется. В доказательстве предложения 3.1 множество X'_w теперь не обязано состоять из одного ребра, а в соответствии с общим правилом определяется как $X'_w := X_w - e + a_w$, где $\{e\} = L^- \cap E_w$. Это не влияет на доказательство, с точностью до мелких поправок. В доказательстве предложения 3.2 в случае $X_w \neq Y_w$, вместо $\{x_w\} = X_w$ и $\{y_w\} = Y_w$, ребра x_w и y_w должны выбираться в $X_w - Y_w$ и $Y_w - X_w$, соответственно, так, чтобы выполнялось $x_w >_w y_w$ (что можно сделать, ввиду $X_w \succ_w Y_w$). Структура доказательства и основные детали сохраняются.

5) В доказательстве предложения 4.1, вместо $\{m_w\} = M_w$ и $\{x_w\} = X_w$, следует выбрать $m_w \in M_w - X_w$ и $x_w \in X_w - M_w$ таким образом, чтобы выполнялось $m_w >_w x_w$. В остальном изложение разд. 4 принципиально не изменяется.

6) Можно убедиться, что построения и результаты, изложенные в разд. 5 и 6, верны и для общего случая квот в W. В частности, остается верной теорема 5.1, утверждающая, что посет ротаций $(\mathcal{R}, \lessdot)$ строится за время $O(|E|^2)$.

8. МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОСТИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ВЫБОРОМ

Как упоминалось во Введении, рассматриваемая нами модель стабильности (КБМ) появляется при редукции более общей модели стабильных матчингов в двудольном графе. В последней предпочтения агентов одной доли (“фирм”) задаются с помощью плоттовских и кардинально монотонных ФВ, а предпочтения агентов другой доли (“работников”) задаются т.н. последовательными (sequential) ФВ; для определенности мы далее будем именовать эту модель *последовательной*, или *П-моделью*. В работе [16] было установлено, что имеет место редукция П-модели к КБМ, при которой множества стабильных матчингов оказываются изоморфными. Ниже, следуя [16], мы даем описание П-модели и ее редукции к КБМ и формулируем утверждения об изоморфизмах соответствующих матчингов и их решеток. Затем мы обсуждаем, какие следствия для П-модели можно получить из результатов о ротациях и их приложениях, полученных для КБМ.

Следует заметить, что в [16] рассматривается более широкий класс моделей с последовательными ФВ, однако нас сейчас интересует только та их них, что непосредственно связана с редукцией к КБМ. Для простоты изложения мы будем предполагать, что рассматриваемые графы не содержат кратных ребер (допущение кратных ребер будет сделано в замечании в конце раздела).

Как и прежде, рассматривается двудольный граф $G = (V, E)$ с вершинными долями W ("работники") и F ("фирмы"), и для каждой вершины $f \in F$ задана плоттовская и кардинально монотонная ФВ $C_f : 2^{E_f} \to 2^{E_f}$. В то же время для каждой вершины $w \in W$ задана последовательность *линейных* ФВ $C_w^1, \dots, C_w^{q(w)}$ на E_w; это означает, что каждая ФВ C_w^i связана с линейным порядком $>_w^i$ на E_w и выбирает в каждом подмножестве $Z \subseteq E_w$ максимальный элемент относительно $>_w^i$. Можно считать, что $q(w) \le |E_w|$.

Определение 4. Обозначим $C_w^1 * \dots * C_w^{q(w)}$ функцию выбора C_w, которая для любого $Z \subseteq E_w$ определяет его подмножество $C_w(Z)$, состоящее из элементов $z_1, \dots, z_k$, где $k = \min\{|Z|, q(w)\}$, которые выбираются по следующему рекурсивному правилу: z_i — это максимальный элемент относительно $>_w^i$ в множестве $Z - \{z_1, \dots, z_{i-1}\}$. Такую функцию C_w назовем *последовательной ФВ* ранга $q(w)$, порождаемую линейными порядками $>_w^1, \dots, >_w^{q(w)}$ (или линейными ФВ $C_w^1, \dots, C_w^{q(w)}$).

Показывается, что ФВ C_w является плоттовской и квотируемой с квотой $q(w)$. Совокупность $\{C_v,\ v \in V\}$ указанных ФВ и определяет то, что мы выше назвали П-моделью. Эта модель представляет собой частный случай СБМ (специальной булевской модели, упомянутой во Введении), и в то же время она обобщает КБМ. (Заметим также, что, как указано в [16], ранее было показано, что не всякая квотируемая плоттовская ФВ является последовательной ФВ.)

Приступим к описанию редукции данной П-модели, определяемой вышеуказанными ФВ C_v, $v \in V$. Граф G преобразуется путем репликации вершин доли W. А именно,

каждая вершина $w \in W$ заменяется $q(w)$ вершинами $w^1, \dots, w^{q(w)}$, и, соответственно, каждое ребро $wf \in E$ порождает $q(w)$ ребер $w^i f$, $i = 1, \dots, q(w)$. (8.1)

Полученный граф обозначим $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ и обозначим через π естественное отображение (проекцию) $\widetilde{V} \cup \widetilde{E}$ в $V \cup E$. Объекты, связанные с $\widetilde{G}$, мы будем также обозначать с тильдой. В частности, копии вершин $f \in F$ в $\widetilde{G}$ обозначим как $\widetilde{f}$, и для любой вершины $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ множество инцидентных ребер в $\widetilde{G}$ обозначим как $\widetilde{E}_{\widetilde{v}}$.

Теперь объясним, как задаются предпочтения и функции выбора $\widetilde{C}_{\widetilde{v}}$ для вершин $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$. Для вершин в $\widetilde{W}$ это делается бесхитростно, а именно:

для вершины $w^i \in \widetilde{W}$ (где $w \in W$ и $1 \le i \le q(w)$) ФВ $\widetilde{C}_{w^i}$ — это линейная ФВ, определяемая линейным порядком $>_{w^i}$ на $\widetilde{E}_{w^i}$, являющимся копией порядка $>_w^i$ на E_w. (8.2)

Для вершин в $\widetilde{F}$ устройство функций выбора менее тривиально. А именно, для вершины $\widetilde{f} \in \widetilde{F}$ (копии f в F) рассмотрим подмножество ребер $\widetilde{Z} \subseteq \widetilde{E}_{\widetilde{f}}$ и его образ $Z = \pi(\widetilde{Z})$ в G, и образуем $\widetilde{C}_{\widetilde{f}}$ следующим образом:

для каждого $wf \in C_f(Z)$ в "слое" $\pi^{-1}(wf)$ возьмем ребро $w^i f$ такое, что $w^i f$ принадлежит множеству $\widetilde{Z}$ и при этом имеет минимальный номер i; тогда $\widetilde{C}_{\widetilde{f}}$ является объединением взятых элементов. (8.3)

Пусть $\mathcal{S}$ обозначает множество стабильных матчингов для рассматриваемой П-модели с графом G и функциями выбора C_f ($f \in F$) и C_w ($w \in W$) (где C_f плоттовская и кардинально монотонная, а C_w — последовательная ФВ, порожденная линейными порядками $>_w^1, \dots, >_w^{q(w)}$). Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}$ обозначает множество стабильных матчингов для КБМ с построенными графом $\widetilde{G}$, ФВ $\widetilde{C}_{\widetilde{f}}$ ($f \in F$) и линейными порядками $>_{w^i}$. В [16] доказываются следующие ключевые свойства:

(i) для каждого стабильного матчинга $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ ограничение отображения π на множество $\widetilde{X}$ инъективно;

(ii) отображение π индуцирует биекцию между множествами стабильных матчингов $\widetilde{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{S}$; (8.4)

(iii) указанное отображение стабильных матчингов $\widetilde{X} \overset{\pi}{\longmapsto} X$ дает изоморфизм решеток на $\widetilde{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{S}$, т.е. для $X, Y \in \mathcal{S}$ выполняются $\pi^{-1}(X \curlywedge Y) = \pi^{-1}(X) \,\widetilde{\curlywedge}\, \pi^{-1}(Y)$ и $\pi^{-1}(X \curlyvee Y) = \pi^{-1}(X) \,\widetilde{\curlyvee}\, \pi^{-1}(Y)$ (где $\curlywedge$ и $\curlyvee$ обозначают взятие точной нижней грани (meet) и точной верхней грани (join) для $\mathcal{S}$, и аналогичные обозначения с тильдами применяются для $\widetilde{\mathcal{S}}$).

Основываясь на (8.4) и используя полученные результаты о ротациях для КБМ, мы можем дать описание ротаций для П-модели.

Для этого рассмотрим ротацию $\widetilde{R}$ в графе $\widetilde{G}$. Она применяется для перехода от некоторого стабильного матчинга $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ к непосредственно следующему (в смысле порядка $\prec_{\widetilde{F}}$ в $\widetilde{\mathcal{S}}$) стабильному матчингу $\widetilde{X}'$, а именно, $\widetilde{X}' = (\widetilde{X} - \widetilde{R}^-) \cup \widetilde{R}^+$. Положим $X := \pi(\widetilde{X})$ и $X' := \pi(\widetilde{X}')$. В силу (8.4)(i),(ii), π устанавливает биекцию между $\widetilde{X}$ и X и между $\widetilde{X}'$ и X', откуда легко заключить, что $\widetilde{R}^-$ изоморфно $\pi(\widetilde{R}^-)$, и $\widetilde{R}^+$ изоморфно $\pi(\widetilde{R}^+)$. Априори мы не можем исключить ситуацию $\Delta := \pi(\widetilde{R}^-) \cap \pi(\widetilde{R}^+) \neq \emptyset$ (в этом случае имеется ребро $wf \in E$ такое, что $w^i f \in \widetilde{R}^-$ и $w^j f \in \widetilde{R}^+$ для некоторых $i \neq j$), и в данный момент мы оставляем возможность $\Delta \neq \emptyset$ как открытый вопрос. Определим

$$R^- := \pi(\widetilde{R}^-) - \Delta \quad \text{и} \quad R^+ := \pi(\widetilde{R}^+) - \Delta.$$

Тогда $X' = (X - R^-) \cup R^+$, $|R^-| = |R^+|$, и оба множества R^-, R^+ непустые (иначе было бы $\widetilde{X} \neq \widetilde{X}'$, но $\pi(\widetilde{X}) = \pi(\widetilde{X}')$, вопреки (8.4)(ii)).

Можно видеть, что $R := \pi(\widetilde{R}) - \Delta$ порождает реберно простой цикл в G (индуцированный ротацией $\widetilde{R}$, рассматриваемой как цикл), и в этом цикле чередуются ребра из R^- (“отрицательные”) и R^+ (“положительные”). Это R (рассматриваемое, в зависимости от контекста, как множество ребер или как цикл) играет роль ротации в G, и мы говорим, что стабильный матчинг X' получается из X применением ротации R.

(Мы также оставляем открытым вопрос, может ли ротация R проходить через одну и ту же вершину в W более одного раза, что невозможно для $\widetilde{R}$ и $\widetilde{W}$.)

Суммируя сказанное выше, мы можем получить из свойств в (8.4) и результатов для КБМ следующие ожидаемые утверждения:

(i) каждый стабильный матчинг $X \in \mathcal{S}$ может быть получен из минимального матчинга в $(\mathcal{S}, \prec_F)$ применением последовательности ротаций в G;

(ii) отображение $\widetilde{R} \mapsto R = \pi(\widetilde{R}) - (\pi(\widetilde{R}^+) \cap \widetilde{R}^-))$ дает биекцию между ротациями в $\widetilde{G}$ и G; (8.5)

(iii) отображение π индуцирует изоморфизм между посетами ротаций для $\widetilde{G}$ и G.

Заметим, что размеры графа $\widetilde{G}$, полученного репликацией каждой вершины $w \in W$ копиями в количестве $q(w) \leq |F|$, можно грубо оценить как $O(|W||F|)$ вершин и $O(|W||F|^2)$ ребер. Поэтому из теоремы 5.1 можно заключить, что

для П-модели с графом $G = (V = W \sqcup F, E)$ множество ротаций и их посет могут быть построены за время $O(|W|^2|F|^4)$ (включая число обращений к оракулам). (8.6)

(При $|W| > |F|$ эта оценка слегка улучшает оракульную оценку $O(|W|^3|F|^3)$ для построения посета ротаций для СБМ в работе [14].)

Эффективное построение ротаций и их посета в П-модели позволяет эффективно решать задачу минимизации линейной функции на множестве стабильных матчингов, применяя метод, аналогичный описанному в разд. 6.

В заключении, заметим также, что при рассмотрении П-модели на графе G с возможными кратными ребрами можно действовать как изложено в замечании 1 (в разд. 2), получая сведение к П-модели на графе G' без кратных ребер (с индуцированными ФВ для прежних вершин и линейными порядками для добавленных вершин), и затем описывать связь ротаций в G, G' и $\widetilde{G}'$, рассуждая как выше и используя замечание 2 из разд. 5 (подробности мы здесь опускаем).

Автор благодарит Данилова Владимира Ивановича за полезные обсуждения по теме статьи и информирование о работе [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gale D. and Shapley L.S.* College admissions and the stability of marriage // Amer. Math. Monthly **69** (1) (1962) 9–15.

2. *Gusfield D. and Irving R.W.* The stable marriage problem: structure and algorithms, MIT press, 1989.

3. *Manlove D.* Algorithmics of matching under preferences, Vol. 2, World Scientific, 2013.

4. *Kelso A.S. and Crawford V.P.* Job matching, coalition formation and gross substitutes // Econometrica **50** (1982) 1483–1504.

5. *Roth A.E.* Stability and polarization of interests in job matching // Econometrica **52** (1984) 47–57.

6. *Blair C.* The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners // Math. Oper. Res. **13** (1988) 619–628.

7. *Plott C.R.* Path independence, rationality, and social choice // Econometrica **41** (6) (1973) 1075–1091.

8. *Alkan A.* On preferences over subsets and the lattice structure of stable matchings // Review of Economic Design **6** (1) (2001) 99–111.

9. *Alkan A.* A class of multipartner matching models with a strong lattice structure // Econom. Theory **19** (2002) 737–746.

10. *Birkhoff G.* Rings of sets // Duke Mathematical Journal **3** (3) (1937) 443–454.

11. *Irving R.W. and Leather P.* The complexity of counting stable marriages. SIAM J. Comput. **15** (1986) 655–667.

12. *Irving R.W., Leather P. and Gusfield D.* An efficient algorithm for the optimal stable marriage problem // J. ACM **34** (1987) 532–543.

13. *Picard J.* Maximum closure of a graph and applications to combinatorial problems // Manage. Sci. **22** (1976) 1268–1272.

14. *Faenza Yu. and Zhang X.* Affinely representable lattices, stable matchings, and choice functions. ArXiv:2011.06763v2[math.CO], 2021.

15. *Stanley R.P.* Two poset polytopes. Discrete and Computational Geometry **1** (1) (1986) 9–23.

16. *Danilov V.I.* Sequential choice functions and stability problems. ArXiv:2401.00748v2 [math.CO], 2024.

17. *Alkan A. and Gale D.* Stable schedule matching under revealed preference. J. Economic Theory **112** (2003) 289–306.

18. *Aizerman M. and Malishevski A.* General theory of best variants choice: Some aspects // IEEE Transactions on Automatic Control **26** (5) (1981) 1030–1040.

19. *Cechlarova K. and Fleiner T.* On a generalization of a stable roommates problem. EGREST Technical Report No. 2003–03, 2003.

20. *Mourtos I. and Samaris M.* Stable allocations and partially ordered sets // Discrete Optimization **46** (2022) 100731.

21. *Karzanov A.V.* On stable assignments generated by choice functions of mixed type // Discrete Applied Math. **358** (2024) 112–135, https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.06.037.

STABLE MATCHINGS, CHOICE FUNCTIONS, AND LINEAR ORDERS

A. V. Karzanov[a,*]

[a] *The Central Economic Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117418 Russia*
**e-mail: akarzanov7@gmail.com*

Received: 29 August 2024
Revised: 29 August 2024
Accepted: 26 September 2024

Abstract. A model of stable edge subsets (“matchings”) in a bipartite graph $G = (V, E)$ is considered, in which preferences for vertices of one side (“firms”) are given by choice functions with standard properties of consistency, substitutability, and cardinal monotonicity, and preferences for vertices of the other side (“workers”) are given by linear orders. For such a model, we give a combinatorial description of the structure of rotations and propose an algorithm for constructing a rotation poset with a time complexity estimate $O(|E|^2)$ (including calls to oracles associated with choice functions). As a consequence, a “compact” affine representation of stable matchings can be obtained and related problems can be solved efficiently.

Keywords: bipartite graph, choice function, linear preferences, stable matching, affine representability, sequential choice