

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ПРИСТЕНОЧНЫЙ СТАЦИОНАРНЫЙ ЗЕРНИСТЫЙ СЛОЙ В ФОРМЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТУПЕНИ¹⁾

© 2025 г. О.Б. Гуськов^{1,*}

¹ 1125040 Москва, Ленинградский пр-т, 7/1, Институт прикладной механики РАН, Россия

*e-mail: ogskv@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

Переработанный вариант 25.09.2024 г.

Принята к публикации 28.09.2024 г.

Рассматривается задача о течении идеальной жидкости вдоль плоской поверхности при наличии на ней неподвижного зернистого слоя в форме полубесконечной ступеньки конечной толщины, состоящей из бесконечного числа одинаковых сферических гранул, статистически равномерно распределенных в слое. Задача решается на основе использования ранее разработанного метода самосогласованного поля, позволяющего изучать эффекты гидродинамического взаимодействия большого числа сферических частиц в потоках идеальной жидкости, в том числе при наличии внешних границ, и получать усредненные динамические характеристики таких потоков. В первом приближении по объемной доле гранул в слое получена аналитическая функция, описывающая усредненное поле скоростей жидкости как внутри, так и вне этого слоя. Библ. 26. Фиг. 6.

Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие, неподвижный зернистый слой, идеальная жидкость, потенциальное течение, метод самосогласованного поля.

DOI: 10.31857/S0044466925010102, **EDN:** CCKYNX

ВВЕДЕНИЕ

Одной из ключевых задач описания динамики дисперсных сред с повышенной концентрацией дисперсной фазы является учет эффектов коллективного гидродинамического взаимодействия большого количества дисперсных частиц во внешнем потоке несущей сплошной среды. Теоретическое исследование этой проблемы представляет собой чрезвычайно сложную задачу, поскольку, по сути, она представляет собой разновидность известной фундаментальной проблемы «многих тел», которая до сих пор не имеет точного решения ни в одной области науки. В связи с этим решение подобных задач долгое время базировалось на построении различных приближенных феноменологических моделей, первой из которых была так называемая модель единичной ячейки [1, 2]. На ее основе были получены первые приближенные результаты по динамике дисперсных сред [3]. В дальнейшем многие из этих результатов были уточнены на основе физически более строгих теоретических моделей, непосредственно учитывающих гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц [4–7]. Позднее был разработан ряд других подходов к решению задач динамики дисперсных сред [8, 9]. Однако в рамках таких подходов одной из основных проблем является также правильный учет межфазного взаимодействия.

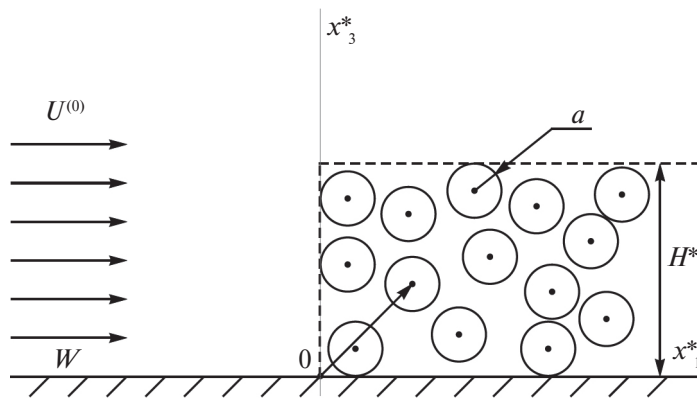
В последнее время широкое распространение получили методы исследования динамики дисперсных сред, основанные на различных феноменологических моделях межфазного взаимодействия с последующим численным интегрированием осредненных уравнений движения фаз [10–15]. Такие методы, очевидно, имеют ряд преимуществ по сравнению с чисто теоретическими подходами. К ним относится возможность исследования задач со сложной геометрией течения и в широком диапазоне значений определяющих гидродинамических критериев (в том числе числа Рейнольдса). Однако они имеют и ряд недостатков. Математически априори довольно сложно определить степень достоверности результатов численных расчетов, что часто приводит к необходимости проведения параллельных экспериментальных исследований. В принятых феноменологических моделях часто используются эмпирические коэффициенты, что также снижает степень математической строгости модели, а соответственно и степень достоверности полученных результатов. При этом любой расчет производится для дискретного набора значений определяющих параметров. Поэтому выявление зависимостей физических характеристик дисперсных потоков от всего комплекса определяющих параметров является чрезвычайно трудоемкой задачей. В этом плане аналитические результаты теоретических методов более информативны.

¹⁾ Работа выполнена в рамках Государственного задания, номер гос. регистрации темы: AAAA–A19–119012290136–7.

Ниже рассматривается модель зернистого слоя, образованного бесконечным числом сферических гранул, расположенных в слое в виде полубесконечной ступеньки конечной толщины на плоской поверхности. В свое время был разработан метод самосогласованного поля [16, 17] для получения аналитических решений задач о совместном движении любого конечного числа сфер в идеальной жидкости [18–22], в том числе при наличии плоской границы. Как было показано [20, 21], этот метод применим также к задачам совместного движения сфер при наличии жестких связей между ними. В рамках принятой модели зернистого слоя это позволяет на основе использования данного метода решить задачу о течении идеальной жидкости вдоль плоской поверхности при наличии любого конечного числа N сферических гранул. Последующее применение процедуры усреднения [6, 7] по различным возможным положениям гранул в слое позволяет получить усредненное поле скоростей жидкости как внутри, так и вне зернистого слоя в явном аналитическом виде.

1. КОНЕЧНАЯ СИСТЕМА НЕПОДВИЖНЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим систему из N сферических гранул радиуса a , погруженных в идеальную несжимаемую жидкость вблизи плоской бесконечной поверхности. Будем считать, что гранулы каким-то образом жестко связаны друг с другом и с заданной поверхностью и, следовательно, не могут перемещаться относительно поверхности. Прономеруем все сферы от 1 до N и обозначим безразмерные координаты центров сферических гранул в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ как $x_\gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $\gamma = 1, 2, 3$). Рассмотрим задачу, когда в некоторый момент времени первоначально покоящаяся на бесконечности жидкость импульсно приводится в состояние движения с заданной постоянной скоростью $U_\gamma^{(0)}$, направленной вдоль плоской поверхности W (см. фиг. 1).



Фиг. 1. Схема течения жидкости вдоль плоской поверхности W с находящимся на ней зернистым слоем толщиной H^* в декартовой системе координат. Ось Ox_2 перпендикулярна плоскости рисунка. Надстрочный индекс $*$ используется для обозначения соответствующих размерных величин.

Классическая постановка этой задачи в предположении потенциальности течения жидкости, как известно, состоит в решении уравнения Лапласа для потенциала скорости φ и выполнении граничных условий скольжения на границе W и на поверхности всех гранул.

В рамках разработанного ранее метода самосогласованного поля [16–22] краевые задачи динамики N сфер в потенциальных потоках идеальной жидкости сводятся к формальному решению системы уравнений для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$, входящих в полученное точное решение таких задач. Для сформулированной выше задачи при наличии плоской границы это решение для безразмерного потенциала скорости φ имеет вид [16, 17]:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_n}^{(i)}}{R_i^{2n+1}} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} T_{\beta_1 \gamma_1} \dots T_{\beta_n \gamma_n} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)} \frac{\tilde{X}_{\gamma_1}^{(i)} \dots \tilde{X}_{\gamma_n}^{(i)}}{\tilde{R}_i^{2n+1}}, \quad (1.1)$$

где

$$\varphi_0 = e_\gamma x_\gamma = x_1, \quad X_\gamma^{(i)} = x_\gamma - x_\gamma^{(i)}, \quad \tilde{X}_\gamma^{(i)} = x_\gamma - T_{\beta\gamma} x_\beta^{(i)}, \quad R_i = \sqrt{X_\gamma^{(i)} X_\gamma^{(i)}}, \quad \tilde{R}_i = \sqrt{\tilde{X}_\gamma^{(i)} \tilde{X}_\gamma^{(i)}},$$

$$T_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = a/L, \quad e_\gamma = \{1, 0, 0\},$$

а тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют бесконечной ($1 \leq n < \infty$) системе алгебраических уравнений:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_n}} \left\{ e_{\beta} X_{\beta}^{(i)} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \alpha^{2n+1}}{k+1} C_{\beta_1 \dots \beta_k}^{(j)} \frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_k}^{(j)}}{R_j^{2k+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \alpha^{2n+1}}{k+1} T_{\delta_1 \beta_1} \dots T_{\delta_k \beta_k} C_{\delta_1 \dots \delta_k}^{(j)} \frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_k}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2k+1}} \right\} \Big|_{R_i=0}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее приняты тензорные обозначения переменных с условием суммирования по повторяющимся нижним координатным индексам, принимающим значения от 1 до 3. Это условие не распространяется только на переменные R_i и \tilde{R}_i . Верхние индексы относятся к частицам, и чтобы отличать их от показателя степени, они заключены в круглые скобки. Соотношения (1.1) и (1.2) записаны в безразмерном виде. В качестве масштабов соответствующих величин приняты скорость потока $U^{(0)}$, заданная на бесконечности, и характерное расстояние между центрами соседних гранул L .

Следует подчеркнуть, что решение (1.1) удовлетворяет граничным условиям скольжения на поверхности W и всех гранул при условии, что тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям (1.2).

Таким образом, задача определения потенциала скорости (1.1) сводится к нахождению коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ на основе системы уравнений (1.2). Для приближенного решения этой системы примем предположение о малости параметра α ($\alpha \ll 1$). Заметим, что это не очень строгое ограничение, поскольку параметр α всегда удовлетворяет условию $\alpha \leq 1/2$ для всех гранулированных сред, состоящих из сферических частиц. При условии $\alpha \ll 1$ все неизвестные функции можно искать в виде рядов по степеням этого параметра:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(k)}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varphi^{(k)}. \quad (1.3)$$

Подставляя разложения (1.3) в систему (1.2) и приравнявая члены с одинаковыми степенями малого параметра, получим систему рекуррентных соотношений:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(k)} = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{n}{n+1} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)(k-2n-1)} D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)}, \quad (1.4)$$

где

$$C_{\gamma}^{(i)(0)} = e_{\gamma}; \quad C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(0)} = 0, \quad m > 1, \quad D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = (1 - \delta_{ji}) Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} + T_{\delta_1 \beta_1} \dots T_{\delta_n \beta_n} G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \delta_1 \dots \delta_n}^{(j,i)}, \\ Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_n}^{(j)}}{R_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_i=0}, \quad G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_n}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_i=0},$$

δ_{ji} — символ Кронекера, а квадратные скобки над знаком суммы обозначают целую часть числа.

Полученные рекуррентные соотношения (1.4) позволяют определить все тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ в аналитическом виде в любом заданном приближении по малому параметру α . В настоящей статье они определены с точностью до $O(\alpha^8)$. Подстановка полученных таким образом тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ в выражение для потенциала скорости (1.1) с учетом соотношений (1.3) в конечном итоге приводит к следующему выражению для продольной U_1 и поперечной U_3 безразмерных составляющих скорости жидкости:

$$U_1 = 1 + \frac{\alpha^3}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) + \frac{\alpha^6}{32} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(x_3^{(i)})^3} \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) - \\ - \frac{\alpha^8}{16} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(x_3^{(i)})^4} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} - 5X_1^{(i)2} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^7} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^7} \right) \right), \quad (1.5)$$

$$U_3 = -\frac{3\alpha^3}{2} \sum_{i=1}^N X_1^{(i)} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} + \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} \right) - \frac{3\alpha^6}{32} \sum_{i=1}^N \frac{X_1^{(i)}}{(x_3^{(i)})^3} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} + \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} \right) - \frac{\alpha^8}{16} \sum_{i=1}^N \frac{X_1^{(i)}}{(x_3^{(i)})^4} \left(\frac{1}{R_i^5} - \frac{1}{\tilde{R}_i^5} - 5 \left(\frac{X_3^{(i)2}}{R_i^7} + \frac{\tilde{X}_3^{(i)2}}{\tilde{R}_i^7} \right) \right).$$

Следует отметить, что при решении системы уравнений (1.4) в данной работе учитываются члены, описывающие только парные взаимодействия частиц. Члены, описывающие взаимодействия более высокого порядка, здесь опущены, поскольку они несущественны при последующем вычислении осредненных характеристик

в рамках данной работы. Если необходимо получить более точные выражения для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(k)}$ и, соответственно, для скорости жидкости (1.5), включая слагаемые, описывающие многочастичные взаимодействия, достаточно просто учесть соответствующие члены при расчетах по формулам (1.4).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА

Формулы (1.5) позволяют с высокой точностью определить скорость жидкости при наличии любого конечного числа N сферических гранул для различных конфигураций их взаимного расположения в пространстве. Однако для систем, состоящих из очень большого числа частиц, реализация такой процедуры расчета становится затруднительной и вряд ли имеет смысл. В этом случае удобнее перейти к усреднённому описанию динамики таких структур на основе известной процедуры усреднения [6, 7] для различных возможных конфигураций частиц в пространстве. В рамках такой процедуры суммирование известных функций в соотношении (1.5) фактически заменяется интегрированием по переменной $x_{\gamma}^{(i)}$, при условии, что частицы не пересекаются друг с другом, с заданной поверхностью W и с точкой, в которой рассчитывается средняя скорость.

Примем модель зернистого слоя как совокупность бесконечного числа одинаковых сферических гранул радиуса α , центры которых статистически равномерно распределены над плоской поверхностью W в слое, имеющем вид полубесконечной ступени конечной толщины $x_1^{(i)} \geq \alpha \cap \alpha \leq x_3^{(i)} \leq (H - \alpha)$. В этом случае все гранулы расположены в пограничном слое толщиной $H = H^*/L$ и не пересекаются с заданной поверхностью W и плоскостями $x_3 = H$ и $x_1 = 0$ (см. фиг. 1). В рамках принятых допущений весовой функцией в процедуре усреднения будет численная концентрация гранул в приграничном слое, которая является постоянной величиной в объеме усреднения. Это упрощает расчеты и позволяет получить результаты в аналитическом виде. Если при расчете средних значений ограничиться первым приближением по объемной доле ϕ гранул в слое, то в выражении для скорости жидкости вида (1.5) необходимо учитывать только те члены, которые описывают парные взаимодействия частиц. Взаимодействия более высокого порядка дают вклад только в коэффициенты при более высоких степенях параметра ϕ . Поэтому в формулах (1.5) они заранее опущены.

Применение процедуры усреднения по ансамблю [6, 7] к первому выражению в правой части равенства (1.5) в рамках сделанных выше предположений приводит к следующим выражениям для безразмерных компонент средней скорости жидкости:

$$U_x(x, z) = U_1 = 1 + k_x(x, z)\phi, \quad U_z(x, z) = U_3 = 1 + k_z(x, z)\phi. \quad (2.1)$$

Вне зернистого слоя функции $k_x(x, z)$ и $k_z(x, z)$ имеют вид

$$k_x(x, z) = q_x(x, z), \quad k_z(x, z) = q_z(x, z), \quad (2.2)$$

где

$$q_x(x, z) = \frac{3}{4\pi} \left(\arctan \left(\frac{h-z-1}{x-1} \right) + \arctan \left(\frac{h+z-1}{x-1} \right) + \arctan \left(\frac{z-1}{x-1} \right) - \arctan \left(\frac{z+1}{x-1} \right) \right),$$

$$q_z(x, z) = \frac{3}{4\pi} \ln \left(\frac{((x-1)^2 + (z-1)^2)((x-1)^2 + (h+z-1)^2)}{((x-1)^2 + (z+1)^2)((x-1)^2 + (h-z-1)^2)} \right).$$

Внутри зернистого слоя функции $k_x(x, z)$ и $k_z(x, z)$ имеют вид:

$$k_x(x, z) = q_x(x, z) + \begin{cases} k_1(z), & x \geq 2 \cap 0 \leq z < 2, \\ k_2(z), & x \geq 2 \cap 2 \leq z < h-2, \\ k_3(z), & x \geq 2 \cap h-2 \leq z < h, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$k_z(x, z) = q_z(x, z),$$

$$k_1(z) = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{8z^3} + \frac{z^2(3-z)}{2} - \frac{1+2z-2z^2+12z^3+6z^4}{8z^3\sqrt{1+4z}} \right), \quad k_2(z) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{8z^3} \right),$$

$$k_3(z) = \frac{1}{8} (h-z-1)((h-z-1)^2-3) - \frac{1}{32z^3} \left(1 + \frac{1+2z(h-1)(1+6z^2)-2z^2((h-1)^2-3z^2)}{\sqrt{1+4z(h-1)}} \right),$$

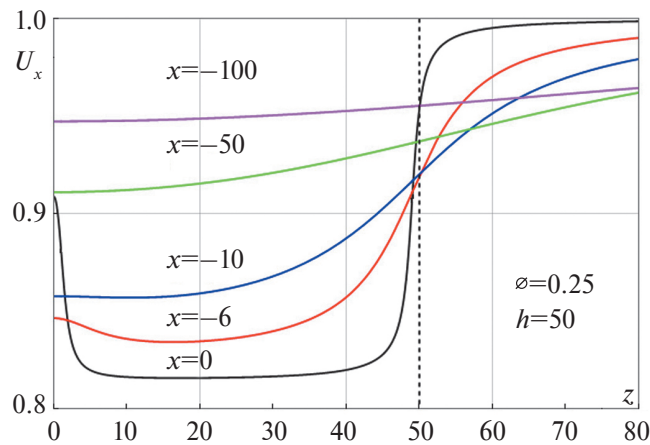
$$x = x_1/\alpha = x_1^*/a, \quad z = x_3/\alpha = x_3^*/a, \quad h = H/\alpha = H^*/a,$$

где x_1^* , x_3^* и H^* — размерные значения соответствующих величин. Итак, процедура усреднения автоматически приводит к тому, что радиус гранул является характерным линейным масштабом рассматриваемой задачи.

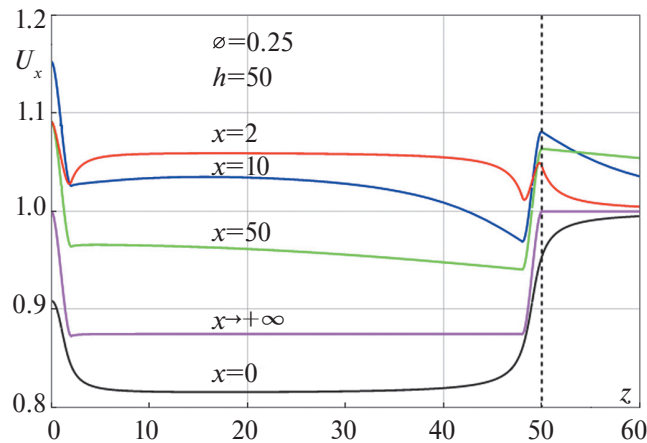
Усреднение второго и третьего слагаемых в правой части (1.5) приводит к громоздким выражениям. При этом их суммарный вклад в конечный результат для среднего профиля скорости жидкости, как показывает сравнение всех полученных функций, не превышает 1%. В связи с этим выражения для этих функций в конечном результате (2.1)–(2.3) опущены. Следует также отметить, что в настоящей работе выражения для компонент скорости жидкости $U_x(x, z)$ и $U_z(x, z)$ получены для всей области течения, за исключением области $0 < x < 2 \cap 0 < z < h$.

Для иллюстрации полученного результата (2.1)–(2.3) на фиг. 2 и 3 показана зависимость осредненной продольной скорости жидкости $U_x(x, z)$ от координаты z в различных сечениях потока при заданных значениях объемной доли гранул ϕ и толщины слоя h .

Как и ожидалось, полученный профиль скорости жидкости удовлетворяет граничному условию $\lim_{z \rightarrow \infty} U_x(x, z) = 1$ в любом сечении потока, т.е. при любом заданном значении координаты x . Как видно из представленных результатов, резкое изменение профиля скорости жидкости происходит вблизи поперечной границы уступа в области $0 \leq x \leq 2$, т.е. на расстоянии порядка диаметра гранулы. При этом профиль усредненной продольной скорости жидкости U_x внутри слоя обретает характерную неоднородную структуру вблизи стенки и вблизи верхней свободной границы слоя. В любом сечении слоя максимум скорости достигается на границах слоя, а затем внутри слоя на расстоянии порядка нескольких размеров зерен от его границ величина скорости обретает примерно одинаковое значение. Эффект «проскальзывания» жидкости вблизи стенки был



Фиг. 2. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_x = U_1$ от координаты $z = x_3/a$ в различных сечениях потока перед поперечной границей уступа ($x \leq 0$) при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.25$ и толщины слоя $h = H^*/a = 50$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин. Пунктирная линия обозначает верхнюю границу зернистого слоя.



Фиг. 3. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_x = U_1$ от координаты $z = x_3/a$ в различных сечениях потока за поперечной границей уступа ($x \geq 0$) при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.25$ и толщины слоя $h = H^*/a = 50$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин. Пунктирная линия обозначает верхнюю границу зернистого слоя.

теоретически исследован в работе [22], в которой была рассмотрена похожая задача — о течении идеальной жидкости вдоль стенки при наличии стационарного зернистого слоя конечной толщины, расположенного перпендикулярно стенке. В упомянутой работе было показано, что этот эффект является прямым следствием коллективного гидродинамического взаимодействия частиц слоя, и он имеет место при условии статистически равномерного распределения частиц в слое, т.е. даже при отсутствии разреженности слоя вблизи стенки. Как следует из результатов настоящей работы, этот эффект имеет место (см. фиг. 3) также вблизи внешней свободной границы слоя, и он также является прямым следствием коллективного гидродинамического взаимодействия частиц.

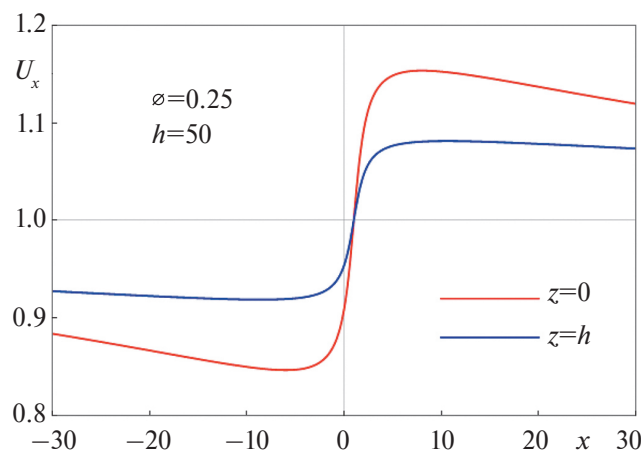
В частном случае при $x \rightarrow +\infty$, т.е. вниз по потоку вдали от поперечной границы уступа, результат для профиля скорости жидкости (2.1)–(2.3) совпадает с полученным ранее [23]. В этой области ($x \rightarrow +\infty$) течение имеет следующую характерную особенность — возмущение заданного внешнего течения, обусловленное наличием гранул, образующих зернистый слой, не выходит за пределы этого слоя. При этом на границах слоя при $z = 0$ и $z = h$ скорость жидкости достигает значения, равного заданной скорости внешнего потока, с нулевыми производными. А внутри слоя на расстоянии порядка диаметра гранулы от его границ скорость жидкости имеет примерно постоянное значение $U_x \approx 1 - \phi/2$, не зависящее от толщины слоя.

Зависимости скорости жидкости $U_x(x, z)$ от продольной координаты x на стенке ($z = 0$) и на уровне верхней границы зернистого слоя ($z = h$) представлены на фиг. 4. Как видно, функции имеют минимум перед поперечной границей уступа и максимум после него. В частности, минимальное и максимальное значения скорости жидкости на стенке ($z = 0$) достигаются в точках $x_{\min} = 1 - \sqrt{h-1}$ и $x_{\max} = 1 + \sqrt{h-1}$ соответственно. Зависимость x_{\min} и x_{\max} от параметров задачи при условии $z \neq 0$ имеет более сложный вид.

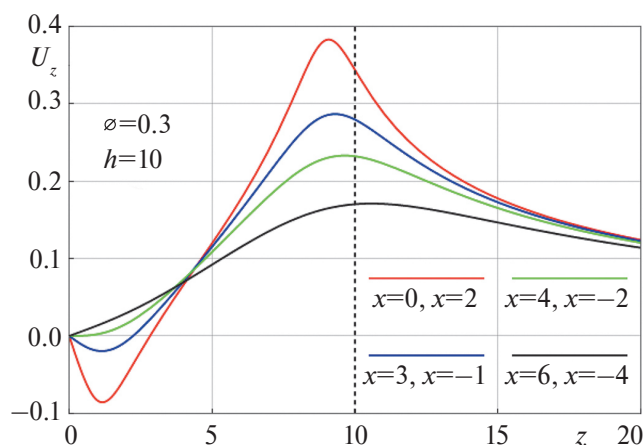
Зависимости усредненной поперечной скорости жидкости $U_z(x, z)$ от координаты z в различных сечениях потока при заданных значениях объемной доли гранул ϕ и толщины слоя h представлены на фиг. 5.

Как и ожидалось, поперечная скорость жидкости $U_z(x, z)$ на стенке ($z = 0$) равна нулю при любом значении переменной x . Максимальные положительные значения поперечной скорости наблюдаются вблизи точки пересечения продольной и поперечной границ зернистого слоя. Отрицательные значения поперечной скорости наблюдаются на небольшой области в районе точки пересечения стенки и поперечной границы зернистого слоя. Линейный размер этой области имеет порядок нескольких диаметров гранул. Как и ожидалось, поперечная скорость жидкости удовлетворяет граничному условию $\lim_{z \rightarrow \infty} U_z(x, z) = 0$.

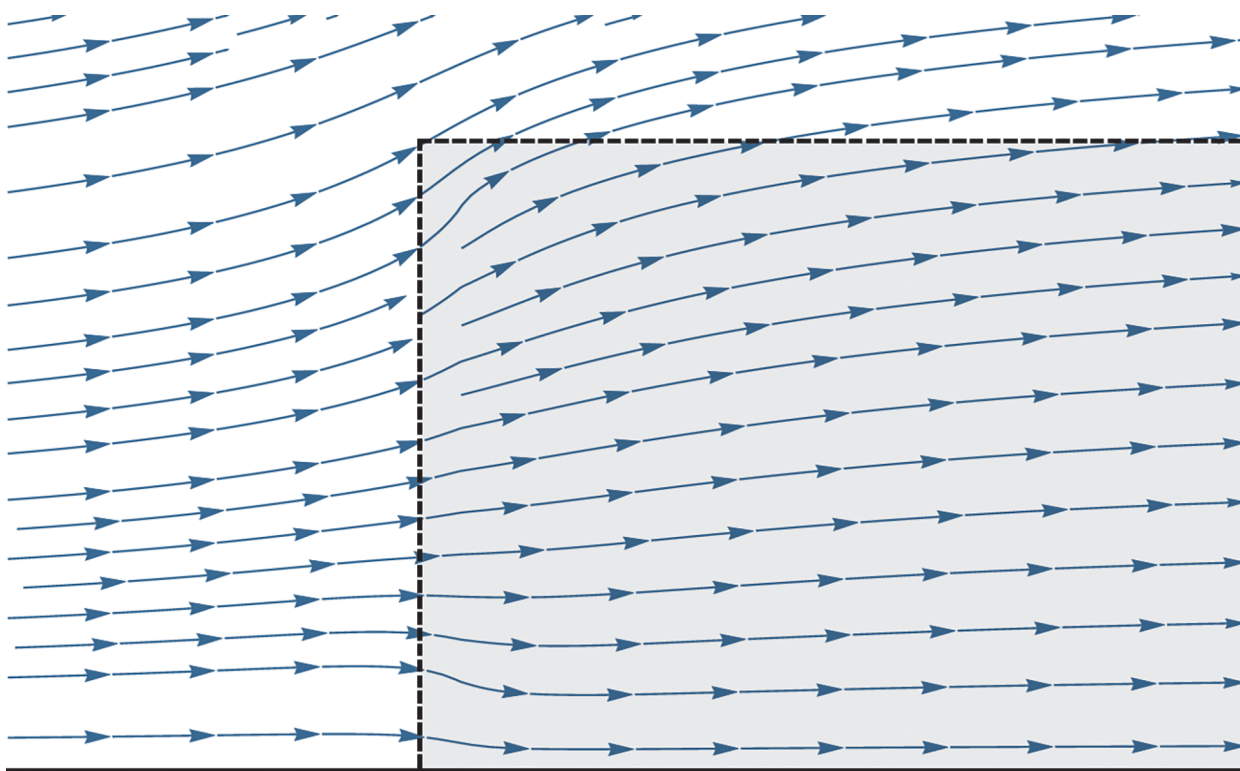
Полученная характерная картина течения жидкости в области вблизи поперечной границы слоя представлена на фиг. 6.



Фиг. 4. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_x = U_1$ от продольной координаты $x = x_1/a$ для двух значений координаты $z = x_3/a$ ($z = 0$ и $z = h$) при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.25$ и толщины слоя $h = H^*/a = 50$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин.



Фиг. 5. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_z = U_3$ от координаты $z = x_3/a$ в различных поперечных сечениях потока при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.3$ и толщины слоя $h = H^*/a = 10$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин. Пунктирная линия обозначает верхнюю границу зернистого слоя.



Фиг. 6. Характерная итоговая картина течения жидкости в области vicinity поперечной границы слоя. Пунктирная линия обозначает границу гранулированного слоя.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе теоретически исследована задача о течении жидкости через пристеночный неподвижный зернистый слой в виде полубесконечной ступеньки. Задача решена с учетом эффектов коллективного гидродинамического взаимодействия гранул в заданном внешнем потоке. Получено аналитическое решение для усредненного профиля скорости жидкости как снаружи, так и внутри зернистого слоя с учетом влияния внешней плоской границы. Задача решалась в рамках модели идеальной (невязкой) жидкости для несущей сплошной среды в первом приближении по объемной доле гранул в слое при условии их статистически равномерного распределения в пространстве внутри слоя.

Следует также отметить, что в рамках предложенного метода решения нет необходимости использовать какие-либо дополнительные предположения, в том числе феноменологические. Как известно, используемая в данной работе модель идеальной (невязкой) жидкости для сплошной несущей среды приближенно описывает течение жидкостей и газов при высоких числах Рейнольдса. Кроме того, результат (2.1)–(2.3) получен в первом приближении по объемной доле гранул ϕ в слое, т.е. для малых значений этого параметра. Однако реальная точность и пределы применимости результата (2.1)–(2.3) по числу Рейнольдса и объемной доле гранул в слое могут быть установлены только экспериментально. Следует отметить, что в записи решения (1.5) приведены только те функции, которые при усреднении дают вклад в коэффициент перед первой степенью объемной доли гранул ϕ в слое в формулах (2.1)–(2.3). Для получения решения вида (2.1)–(2.3) с точностью до более высоких степеней объемной доли ϕ просто необходимо при решении системы (1.4) учесть все функциональные члены, описывающие взаимодействия частиц соответствующего порядка, а затем применить к ним процедуру усреднения [6, 7].

Это возможно в рамках разработанного метода [16, 17], что может стать предметом дальнейших исследований.

В работе для поставленной гидродинамической задачи в рамках модели идеальной жидкости получено аналитическое решение одного из классических уравнений, относящегося не только к гидродинамике, но и к ряду других областей физики. Полученное в работе аналитическое решение гидродинамической задачи может быть непосредственно использовано, например, для теоретического исследования процессов переноса в дисперсной среде с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц, поскольку решение таких задач также основано на решении уравнения Лапласа. Возможность такого подхода обосновал Фельдерхоф (см. [5]) в 1991 г. В рамках этого подхода Бошенятов [24–26] получил коэффициенты переноса (теплопроводность, электропроводность) для дисперсных сред (в том числе, сложно-структурированных) с учетом эффектов коллективного взаимодействия частиц. В этих работах непосредственно использовались результаты решения соответствующих гидродинамических задач в рамках модели идеальной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cunningham E.* On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium // *Proc. Roy. Soc. (London)*. 1910. Ser. A. V. 83. P. 357–365. <https://doi.org/10.1098/rspa.1910.0024>
2. *Zuber N.* On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime // *Chem. Eng. Sci.* 1964. V. 19. Issue 11. P. 897–917. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(64\)85067-3](https://doi.org/10.1016/0009-2509(64)85067-3)
3. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976.
4. *Wijngaarden L., Jeffrey D.J.* Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. Issue 1. P. 27–44. <https://doi.org/10.1017/S0022112076001110>
5. *Felderhof B.U.* Virtual mass and drag in two-phase flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. P. 177–196. <https://doi.org/10.1017/S002211209100201X>
6. *Batchelor G.K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. Issue 2. P. 245–268. <https://doi.org/10.1017/S0022112072001399>
7. *Beenakker C.W.J., Mazur P.* Is sedimentation container-shape dependent? // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. Issue 11. P. 3203–3206. <https://doi.org/10.1063/1.865367>
8. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука. 1987.
9. *Osipov A. N.* Lagrangian modelling of dust admixture in gas flows // *Astrophysics and Space Science*. 2000. V. 274. P. 377–386. <https://doi.org/10.1023/A:1026557603451>
10. *Ge W., Wang L., Xu J., Chen F., Zhou G., Lu L., Chang Q., Li J.* Discrete simulation of granular and particle-fluid flows: from fundamental study to engineering application // *Reviews in Chemical Engineering*. 2017. V. 33. No. 6. P. 551–623. <https://doi.org/10.1515/revce-2015-0079>
11. *Bettega R., Correa R.G., Freire J.T.* Velocity profile in fixed beds: A study on the representativeness of the experimental measurement of downstream flow characteristics // *Drying Technology*. 2007. V. 25. Issue 7–8. P. 1175–1183. <https://doi.org/10.1080/07373930701438519>

12. *Chauchat J., Medale M.* A three-dimensional numerical model for incompressible two-phase flow of a granular bed submitted to a laminar shearing flow // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010. V. 199. Issue 9–12. P. 439–449. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.07.007>
13. *Freund H., Zeiser T., Huber F., Klemm E., Brenner G., Durst F., Emig G.* Numerical simulations of single-phase reacting flows in randomly packed fixed-bed reactors and experimental validation // *Chem. Eng. Sci.* 2003. V. 58. Issue 3–6. P. 903–910. [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(02\)00622-X](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(02)00622-X)
14. *Ouriemi M., Aussilous P., Guazzelli E.* Sediment dynamics. Part 1. Bed-load transport by laminar shearing flows // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 636. P. 295–319. <https://doi.org/10.1017/S0022112009007915>
15. Михайленко К.И., Кулешов В.С. Математическое моделирование скоростной неравномерности потока газа за пористой преградой // *Вычисл. технологии.* 2015. Т. 20. № 6. С. 46–58.
16. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А. Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // *Докл. АН СССР.* 1986. Т. 290. № 4. С. 820–824.
17. Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *Докл. АН.* 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
18. Гуськов О.Б. О присоединенной массе тела, движущегося в суспензии сферических частиц // *Докл. АН.* 2012. Т. 442. № 1. С. 50–53.
19. Гуськов О.Б. Присоединенная масса сферы в суспензии сферических частиц // *ПММ.* 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 134–139.
20. Гуськов О.Б. О движении кластера сферических частиц в идеальной жидкости // *ПММ.* 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 186–193.
21. Гуськов О.Б. О присоединенной массе шероховатой сферы // *ПММ.* 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 471–482.
22. Гуськов О.Б. Течение идеальной жидкости сквозь стационарный зернистый слой при наличии плоской стенки // *Докл. АН.* 2020. Т. 491. № 1. С. 37–43.
23. Гуськов О.Б. Течение идеальной жидкости в пристенном стационарном зернистом слое конечной толщины. // *Сб. трудов 9-й Всерос. научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”.* 19–21 ноября 2019 г. Москва. С. 74–81. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41914494>
24. Бошнятов Б.В. К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // *Докл. АН.* 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.
25. Бошнятов Б.В. К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // *Письма в ЖТФ.* 2015. Т. 41. Вып. 3. С. 67–73.
26. Бошнятов Б.В. Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкости // *Письма в ЖТФ.* 2018. Т. 44. Вып. 3. С. 17–24.

AN IDEAL-FLUID FLOW THROUGH A NEAR-WALL FIXED GRANULAR LAYER IN THE FORM OF SEMI-INFINITE STEP

O.B. Gus'kov^{a,*}

^a*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, 1125040 Russia*

^{*}*e-mail: ogskv@mail.ru*

Received: 12 December 2023

Revised: 25 September 2024

Accepted: 28 September 2024

Abstract. The problem on the flow of an ideal fluid along a flat surface in the presence of a fixed granular layer on it in the form of a semi-infinite step of finite thickness consisting of an infinite number of identical spherical granules statistically uniformly distributed in the layer is considered. The problem is solved based on using the previously developed method of the self-consistent field, which allows studying the effects of hydrodynamic interaction of a large number of spherical particles in flows of an ideal fluid, including in the presence of external boundaries, and obtaining the averaged dynamic characteristics of such flows. In the first approximation in the volume fraction of granules in a layer, an analytical function is obtained that describes the averaged velocity field of the fluid both inside and outside this layer.

Keywords: hydrodynamic interaction, fixed granular layer, ideal fluid, potential flow, self-consistent field method