ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 1, с. 69–87

УДК 517.987.1

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА–КАЦА ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

© 2025 г. Ю.Н. Орлов[1,*], В.Ж. Сакбаев[2,]**

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия
[2] 119991 Москва, ул. Губкина, 8, МИ им. В.А. Стеклова РАН, Россия
*e-mail: ov3159f@yandex.ru
**e-mail: fumi2003@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024 г.
Переработанный вариант 29.09.2024 г.
Принята к публикации 30.09.2024 г.

Построено и исследовано биективное отображение пространства операторнозначных функций в множество комплекснозначных конечных аддитивных цилиндрических мер на пространстве траекторий. Установлены условия при которых задача Коши для уравнения первого порядка с переменным оператором генерирует двухпараметрическое эволюционное семейство операторов. Получено представление решения задачи Коши с переменным возмущенным генератором с помощью континуального интеграла от определяемого возмущением функционала на пространстве траекторий по цилиндрической псевдомере, определяемой невозмущенным двухпараметрическим эволюционным семейством операторов. Библ. 13.

Ключевые слова: эволюционное семейство операторов, однопараметрическая полугруппа, конечно-аддитивная мера, марковский процесс, теорема Чернова, формула Фейнмана–Каца.

DOI: 10.31857/S0044466925010077, **EDN**: CCYPJK

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения эволюционных линейных дифференциальных уравнений с независящими от времени коэффициентами представляются C_0-полугруппами линейных операторов, а в случае переменных коэффициентов — эволюционными двухпараметрическими семействами операторов [1, 2]. В работах [3–5] разрабатываются методы представления однопараметрических эволюционных полугрупп математическими ожиданиями функционалов от случайных процессов, а в работах [6–8] полугруппы представляются функциональными интегралами по пространству траекторий процессов. Методы континуального интегрирования в [9] и методы итераций Фейнмана–Чернова в [10] применяются к постронию аппроксимаций решений эволюционных уравнений и анализу сходимости таких аппроксимаций.

Конструкция континуального интеграла, описывающего возмущенную полугруппу, была рассмотрена в работе [11] для случая, когда эволюционное уравнение имеет независящие от времени коэффициенты и эволюционные семейства операторов являются однопараметрическими полугруппами. Там же получена формула Фейнмана–Каца, позволяющая выразить возмущенную полугруппу с помощью континуального интеграла от зависящего от возмущения функционала на пространстве траекторий по цилиндрической псевдомере, определяемой невозмущенной полугруппой. Цилиндрическая псевдомера отличается от цилиндрической меры, заданной на классе всех борелевских цилиндров, областью определения, порожденной классом цилиндров с базой из некоторой (возможно, меньшей, чем борелевская) алгебры подмножеств координатного пространства. Иногда для краткости такие псевдомеры будем называть *мерами*.

В рамках изучаемого в настоящей статье метода обобщенный случайный процесс со значениями в некотором измеримом пространстве $(E, \mathcal{A})$ отождествляется с марковской цилиндрической псевдомерой, заданной на алгебре цилиндрических множеств $\mathcal{A}_{Cyl}$ в пространстве отображений временного промежутка $T = \mathbb{R}_+$ процесса в измеримое пространство $(E, \mathcal{A}(\mathcal{R}))$ его значений (см. [11]). Построено биективное отображение $\mathbf{V}$ множества марковских комплекснозначных конечно-аддитивных мер, заданных на цилиндрической алгебре $\mathcal{A}_{Cyl}$,

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ. Разделы 2, 3, 4 работы выполнены Ю.Н. Орловым, а разделы 5 и 6 — В.Ж. Сакбаевым. Исследование В.Ж. Сакбаева выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект 24-11-00039 в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН).

на множество двухпараметрических эволюционных семейств линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(E)$ функций, квадратично интегрируемых по мере Лебега на пространстве значений случайного процесса E. Марковское свойство цилиндрической меры (точное определение см. ниже) состоит в том, что значение меры на всей совокупности цилиндрических множеств (а значит, и на алгебре $\mathcal{A}_{Cyl}$) определяется сужением меры на совокупность цилиндрических множетв с двухвременными цилиндрическими условиями.

В настоящей работе получено обобщение конструкции континуального интеграла Фейнмана на случай эволюционных уравнений с переменными операторными коэффициентами, порождающими двухпараметрические эволюционные семейства операторов (см. [1, 2]). Метод построения формул Фейнмана–Каца для решения уравнения Шрёдингера с переменным генератором впервые предложен, насколько нам известно, в [12]. Условия применимости построенного обобщения расширяют возможности аппроксимации формулами Фейнмана–Каца решений эволюционных уравнений с переменными генераторами. Получена формула Фейнмана–Каца, выражающая возмущенное двухпараметрическое эволюционное семейство операторов с помощью континуального интеграла от зависящего от нестационарного возмущения функционала на пространстве траекторий по цилиндрической мере, являющейся образом действия биекции $\mathbf{V}^{-1}$ на невозмущенное эволюционное семейство операторов.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей работе будет построено обобщение представления однопараметрических полугрупп с помощью цилиндрических мер на случай двухпараметрических эволюционных семейств операторов, разрешающих дифференциальные уравнения с зависящими от времени коэффициентами. Для реализации этой цели нам потребуется ввести определения, описывающие операторнозначные функции, меры на пространстве траекторий и свойства этих объектов. Также будет кратко изложена теория, описывающая связь однопараметрических семейств операторов с цилиндрическими мерами на пространстве траекторий.

Пусть $E = \mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$ – конечномерное евклидово пространство, снабженное мерой Лебега; $H = L_2(E)$ – гильбертово пространство функций на E, квадратично интегрируемых по мере Лебега; и пусть $B(H)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих в H.

Пусть $\mathcal{R}$ есть σ-кольцо ограниченных борелевских множеств пространства E и $\mathcal{A}_R$ – порожденная этим кольцом σ-алгебра. Пусть $M(\mathbb{R}_+, E)$ – линейное отображение временной полуоси $\mathbb{R}_+$ в пространство E, называемое пространством траеторий, и пусть $\mathcal{A}_{Cyl}$ – алгебра цилиндрических множеств в пространстве траекторий, т.е. алгебра, порожденная полуалгеброй Cyl (см. [8]) цилиндрических множеств вида

$$C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} = C_{B_1,\ldots,B_n}^{t_1,\ldots,t_n} = \{x \in M(R_+, E):\ x(t_j) \in B_j, \quad j = 1,\ldots,n\}, \tag{1}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{A}_R, \quad 0 \le t_1 < \ldots < t_n < +\infty.$$

Множество $\mathbf{t} = \{t_1,\ldots,t_n\}$ называется набором временных индексов цилиндрического множества (1), а множество $\mathbf{B} = \{B_1,\ldots,B_n\}$ – базой цилиндрического множества.

Через $\mathcal{A}_m(H)$ обозначим абелеву алгебру операторов умножения на функцию, принадлежащую банахову пространству $L_\infty(E)$ измеримых ограниченных функций $E \to \mathbb{C}$. Символом $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H))$ обозначим линейное пространство отображений полуоси $\mathbb{R}_+$ в пространство $B(H)$ и положим

$$\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) = \{\mathbf{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+, B(H)):\ \mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m(H)\}.$$

Обозначим через $a(\mathcal{A}_{Cyl})$ линейное пространство комплекснозначных аддитивных функций множества (конечно-аддитивных мер), заданных на алгебре $\mathcal{A}_{Cyl}$.

Определим отображение

$$\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a(\mathcal{A}_{Cyl}), \quad \mathbf{\Lambda}(\mathbf{F}) = \mu^{\mathbf{F}},\ \mathrm{Im}\,\mathbf{\Lambda} = a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl}),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\mu^{\mathbf{F}}(C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}}) = (\chi_{B_n}, \mathbf{F}(t_n - t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \ldots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{F}(t_1 - t_0)\chi_{B_0}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall\, i = 0,\ldots,n. \tag{2}$$

Так как $\mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m$, то $\mathbf{F}(0)(\bullet) = f(x)(\bullet)$, где $f \in L_\infty(E)$. Потому для $n = 0$ и для произвольного $t_0 \geqslant 0$ положим:

$$\mu^{\mathbf{F}}(C_B^{t_0}) = \begin{cases} (\chi_B,\ \mathbf{F}(0)\chi_B) = \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), & B \in \mathcal{R}, \\ M_0 - \int\limits_{E\setminus B} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), & B \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),\ B \notin \mathcal{R}, \end{cases} \tag{3}$$

где $M_0 \in \mathbb{C}$ — некоторая фиксированная константа и $\mu^{\mathbf{F}}(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)) = M_0$ (см. [13]).

Пусть $C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} \in Cyl$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ — максимальный номер среди тех, которые соответствуют множествам в базе $\mathbf{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$, не лежащим в кольце $\mathcal{R}$. Тогда из условия аддитивности функции $\mu^{\mathbf{F}}$ на алгебре $a(\mathcal{A}_{Cyl})$ следует равество

$$\begin{gathered}\mu^{\mathbf{F}}(C_{B_0, \ldots, B_{m-1}, B_m, B_{m+1}, \ldots, B_n}^{t_0, \ldots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n}) = \\ = \mu^{\mathbf{F}}(C_{B_0, \ldots, B_{m-1}, B_{m+1}, \ldots, B_n}^{t_0, \ldots, t_{m-1}, t_{m+1}, \ldots, t_n}) - \mu^{\mathbf{F}}(C_{B_0, \ldots, B_{m-1}, E\setminus B_m, B_{m+1}, \ldots, B_n}^{t_0, \ldots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n}).\end{gathered} \tag{4}$$

Условие (4) позволяет продолжить функцию множества $\mu^{\mathbf{F}}$, заданную равенствами (2)—(3), на всю алгебру $a(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Теорема 1 (см. [8]). *Для каждого отображения* $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ *существует единственная мера* $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{F}) \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$*, удовлетворяющая условиям* (2), (3).

Отображение

$$\mathbf{\Lambda} : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a(\mathcal{A}_{Cyl})$$

инъективно.

Определение 1 (см. [8]). Мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется стационарной, если $\mu(C_{B_0,\ldots,B_n}^{t_0+s,\ldots,t_n+s}) = \mu(C_{B_0,\ldots B_n}^{t_0,\ldots,t_n}) \quad \forall\ s \geq 0$, $\forall\ C_{B_0,\ldots,B_n}^{t_0,\ldots,t_n} \in Cyl$.

Каждая цилиндрическая мера μ задает семейство функций

$$\{\beta_{\mu;\, B_1,\ldots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\ldots,t_n}, \quad B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_R, \quad 0 \leq t_0 < \ldots < t_n < +\infty\},$$

сопоставляющих каждой упорядоченной паре χ_{B_0}, χ_{B_n}, B_0, $B_n \in \mathcal{R}$ комплексное число с помощью равенства:

$$\beta_{\mu;\, B_1,\ldots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\ldots,t_n}(\chi_{B_0}, \chi_{B_n}) = \mu(C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}}), \quad C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} \in Cyl. \tag{5}$$

Определение 2 (см. [13]). Цилиндрическая мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется *непрерывной по базе*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered}\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, t_0 \leq \cdots \leq t_n \in \mathbb{R}_+, \quad \exists\, M \in (0, +\infty): \quad \forall\, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}), \\ \sup_{u,v \in S(\mathcal{R}):\ \|u\|_H = \|v\|_H = 1} |\beta_{\mu;\, B_1,\ldots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\ldots,t_n}(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H.\end{gathered} \tag{6}$$

Пусть $a^J(\mathcal{A}_{Cyl})$ — линейное подпространство пространства мер $a(\mathcal{A}_{Cyl})$, удовлетворяющих условию J, где $J \in \{S, Bc\}$; $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) = a^S(\mathcal{A}_{Cyl}) \bigcap a^{Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Лемма 1. *Если* $\mu \in a^{Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$*, то функция* (5) *допускает единственное продолжение до ограниченной полуторалинейной формы на пространстве* H:

$$(g,\ \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\ldots,B_{n-1}}^{t_0,\ldots,t_n} f) = \beta_{\mu;\, B_1,\ldots,B_{n-1}}^{t_0,t_1,\ldots,t_n}(f,\ g), \quad f,\ g \in H.$$

Доказательство. Функция (5) продолжается до полуторалинейной формы на линейной оболочке индикаторных функций кольца $\mathcal{R}$ в силу требования полуторалинейности. Полученная полуторалинейная форма является непрерывной относительно нормы $\|\cdot\|_{L_2(E)}$ в силу непрерывности по базе (6) меры μ. Так как $\mathrm{span}(\chi_B,\ B \in \mathcal{R})$ — плотное в пространстве H линейное многообразие, то непрерывная на нем полуторалинейная форма однозначно продолжается по непрерывности до непрерывной полуторалинейной формы на пространстве H.

Теорема 2 (см. [8]). *На линейном пространстве* $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ *существует линейное отображение* $\mathbf{V} : a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$*, определяемое условиями*

$$\forall\, t > 0\ (\chi_{B_1}, (\mathbf{V}(\mu))(t)\chi_{B_0})_H = \mu(A_{B_0,B_1}^{0,t}),\ \forall\, B_0, B_1 \in \mathcal{R}; \tag{7}$$

$$(\chi_{B_0}, (\mathbf{V}(\mu))(0)\chi_{B_0})_H = \mu(A_{B_0}^{0})\ \forall\, B_0 \in \mathcal{R}. \tag{8}$$

В линейном пространстве $a^{S,Bc}(\mathcal{A}_{cyl})$ выделим класс мер, сужение на который линейного отображения $\mathbf{V}$ инъективно.

Определение 3 (см. [8]). Мера $\mu \in a^{Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется *марковской*, если

$$\mathbf{U}_{\mu;\, B_{m+1},\ldots,B_{n-1}}^{t_m,\ldots,t_{n-1},t_n} \mathbf{P}_{B_m} \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\ldots B_{m-1}}^{t_0,\ldots t_{m-1},t_m} = \mathbf{U}_{\mu;\, B_1,\ldots B_{n-1}}^{t_0,\ldots t_n} \tag{9}$$

$$\forall\, t_0, \ldots t_n : 0 \leq t_0 < \ldots < t_m < \ldots t_n; \quad \forall\, B_1, \ldots B_{n-1} \in \mathcal{R}.$$

Определение 4 (см. [8]). Марковская мера $\mu \in a^{Bc,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется *строго марковской*, если

$$\mathbf{U}^{t_m,\dots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_{m+1},\dots,B_{n-1}}\mathbf{P}_{B_m}\mathbf{U}^{t_0,\dots t_{m-1},t_m}_{\mu;\,B_1,\dots B_{m-1}} = \mathbf{U}^{t_0,\dots t_n}_{\mu;\,B_1,\dots B_{n-1}} \tag{10}$$

$$\forall\, t_0,\, \dots\, t_n :\ 0 \le t_0 < \dots < t_m < \dots\, t_n;\ \ \forall\, B_1,\, \dots\, B_{n-1} \in \mathcal{A}_{\mathcal{R}}.$$

Символом $a^{J,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ обозначим множество мер, удовлетворяющих условию J и условию (9). Заметим, что если $\mu \in a^{Bc,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$, то мера μ на полуалгебре множеств Cyl может быть восстановлена по своему сужению на класс множеств $Cyl_2 = \{C^{0,t}_{B_0,B},\ t \ge 0,\ B_0, B \in \mathcal{R}\}$.

Теорема 3 (см. [8]). *Образ $a_{\mathbf{\Lambda}}(\mathcal{A}_{Cyl})$ отображения $\mathbf{\Lambda}$ совпадает с множеством $a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$.*

Отображение

$$\mathbf{V} :\ a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$$

определенное условиями (7)*,* (8)*, является обратным к биективному отображению*

$$\mathbf{\Lambda} :\ \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \to a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl}).$$

3. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ И ЗАДАЧА КОШИ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Определение 5 (см. [1, 2]). Двухпараметрическое семейство $\mathbf{U}(t,s)$, $0 \le s \le t < +\infty$, ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H называется эволюционным, если выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{U}(t,t) = \mathbf{I}$ при всех $t \ge 0$,

2) отображение $\mathbf{U} :\ \mathbb{R}^2_{\le} \to B(H)$ непрерывно в сильной операторной топологии на множестве $\mathbb{R}^2_{\le} = \{(s,t) \in R^2 :\ 0 \le s \le t\}$,

3) выполняется эволюционное свойство $\mathbf{U}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau,s) = \mathbf{U}(t,s)\ \forall\, s,\tau,t :\ 0 \le s \le \tau \le t < \infty$.

Нас будут интересовать эволюционные семейства, удовлетаоряющие следующим предположениям.

Предположение 0. Предположим, что существует плотное в пространстве H линейное многообразие D такое, что существует предел

$$\lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{h}(\mathbf{U}(t+h,s) - \mathbf{U}(t,s))u\right) = \mathbf{A}(t,s)u \tag{11}$$

для каждого $(s,t) \in \mathbb{R}^2_{\le}$ и каждого $u \in D$.

Согласно свойству 3) эволюционного семейства $\mathbf{U}(t+h,s)-\mathbf{U}(t,s) = (\mathbf{U}(t+h,t)-\mathbf{I})\mathbf{U}(t,s)$, поэтому условие (11) эквивалентно существованию производной

$$\lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{h}(\mathbf{U}(t+h,t) - \mathbf{I})\mathbf{U}(t,s)u\right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t,s)u, \quad t \ge s \ge 0.$$

В частности, $\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t,s)u|_{s=t} = \mathbf{A}(t)u\ \forall\, u \in D$ при всех $t \ge 0$ и $\mathbf{A}(t,s) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t,s)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2_{\le}$.

Сформулируем предположения 1–5 об операторнозначной функции $\mathbf{A}(s)$, $s \ge 0$, достаточные (как будет показано в теореме 4) для того, чтобы семейство переменных генераторов $\mathbf{A}(s)$, $s \ge 0$, однозначно определяло эволюционное семейство, удовлетворяющее условиям 1)–3) и предположению 0.

Предположение 1. Предположим, что существует плотное в пространстве H линейное многообразие D такое, что при каждом $t \ge 0$ линейный оператор $\mathbf{A}(t)u$, $u \in D$ имеет самосопряженное замыкание.

Предположение 2. Предположим, что замыкание оператора $\mathbf{A}(0)$ имеет обратный $(\mathbf{A}(0))^{-1} :\ H \to D$.

Из предположений 1, 2 следует, что при всех $t > 0$ оператор $\mathbf{A}(t)(\mathbf{A}(0))^{-1}$ всюду определен, замкнут и, следовательно, ограничен [1]. Замкнутость оператора $\mathbf{A}(0)$ позволяет наделить подпространство D нормой графика оператора $\mathbf{A}(0)$, превращающей линейное многообразие D в банахово пространство.

Предположение 3. Пусть общая существенная область определения D генераторов $\mathbf{A}(s)$, $s \in [0,+\infty)$, *инвариантна относительно полугруппы $e^{\mathbf{A}(s)t}$, $t \ge 0$, при каждом $s \in [0,+\infty)$.* Пусть семейство генераторов $\mathbf{A}(s)$, $s \in [0,+\infty)$, равномерно полуограничено сверху.

Предположение 4. Существует число $B \ge 0$ такое, что для любого $u \in D$

$$e^{-B|t-s|}\|\mathbf{A}(s)u\|_H \le \|\mathbf{A}(t)u\|_H \le e^{B|t-s|}\|\mathbf{A}(s)u\|_H \quad \forall\, t,s \ge 0.$$

Заметим, что из предположений 2, 4 следует, что при каждом $t \ge 0$ оператор $\mathbf{A}(t)$ ограниченный обратный. На линейном пространстве D введем семейство эквивалентных в силу предположения 4 норм $\|u\|_{D_t} = \|\mathbf{A}_t u\|_H$, $u \in D$, $t \ge 0$, и положим $\|u\|_{D_0} \equiv \|u\|_D$.

Предположение 5. Пусть оператор-функция $\mathbf{A} : [0, +\infty)\times D \to H$ является равномерно непрерывной в смысле выполнения следующего условия (сильно равномерно непрерывна по Гёльдеру на множестве D):

$$\exists\, L, a > 0 : \ \ \forall\, u \in D\ \ \forall\, t, s > 0,\ \|(\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s))u\|_H \le L|t - s|^a\|u\|_{D_s}. \tag{12}$$

Примером удовлетворяющей предположениям 1–5 оператор-функции может служить оператор-функция со значениями в множестве действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в дивергентной форме с гладко зависящими от временного параметра и пространственных координат коэффициентами, квадратичные формы которых определены на пространстве Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ и равномерно ограничены снизу и сверху квадратичной формой скалярного произведния пространства $\mathbb{R}^d$.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения* 1–4. *Тогда существует число* $M > 0$ *такое, что при любых* $t \ge 0$, $s \ge 0$, $\sigma > 0$ *и любом* $u \in D$ *выпонены неравенствы*

$$\|e^{\mathbf{A}(s)t}u\|_{D_s} \le e^{Mt}\|u\|_{D_s}; \qquad \|e^{\mathbf{A}(s)t}u\|_{D_\sigma} \le e^{M(t+|s-\sigma|)}\|u\|_{D_\sigma}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $s \ge 0$. Так как $u \in D$, то в силу предположения 1 $u \in D(\mathbf{A}(s))$. Из равномерной полуограниченности сверху самосопряженных операторов $\mathbf{A}(s)$, $s \ge 0$, следует существование такой не зависящей от s постоянной $m > 0$, что $\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_H \le e^{mt}\|u\|_H$ и $\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_{D(\mathbf{A}(s))} \le e^{mt}\|u\|_{D(\mathbf{A}(s))}$ и первая оценка доказана ($D(\mathbf{A}(s))$ – гильбертово пространство, предствляющее собой пополнение линейного пространства D по норме $\|\cdot\|_{D(s)}$ графика самосопряженного замыкания оператора $\mathbf{A}(s)$). Из предположений 1–4 следует, что при каждом $\sigma \ge 0$ $e^{t\mathbf{A}(s)}u \in D \subset D(\mathbf{A}(\sigma))$ и при этом

$$\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_{D(\mathbf{A}(\sigma))} \le e^{B|s-\sigma|}\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_{D(\mathbf{A}(s))} \le e^{B|s-\sigma|+mt}\|u\|_{D(\mathbf{A}(s))} \le e^{2B|s-\sigma|+mt}\|u\|_{D(\mathbf{A}(\sigma))}.$$

Значит, оценка (13) выполняется с постоянной $M = m + 2B$.

В частности, из леммы 2 следует, что $\|e^{\mathbf{A}(s)t}u\|_D \le e^{M(t+s)}\|u\|_D$ для любого $u \in D$ и любых $s, t \ge 0$.

Определение 6. Обобщенным решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t),\ t \in (t_0, +\infty), \tag{14}$$

$$u(t_0 + 0) = u_0, \tag{15}$$

где $0 \le t_0 < +\infty$, с удовлетворяющими предположению 1 переменными генераторами и с начальным условием $u_0 \in H$ будем называть такую функцию $u(t, t_0, u_0) \in C([t_0, +\infty), H)$, что при каждом $v \in D$ справедливо равенство

$$(u(t, t_0, u_0) - u_0, v) = \int\limits_{t_0}^{t}(u(s, t_0, u_0), \mathbf{A}(s)v)ds, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{16}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения* 1–5. *Если обобщенное решение задачи Коши существует, то оно единственно.*

Доказательство. Предположим, что у задачи Коши существуют два различных обощенных решения $u(\cdot, t_0, u_0)$, $\hat{u}(\cdot, t_0, u_0)$. Тогда их разность $w(\cdot)$ принадлежит пространству $C([t_0, +\infty), H)$ и в силу (16) удовлетворяет равенству

$$(w(t), v) = \int\limits_{t_0}^{t}(w(s), \mathbf{A}(s)v)ds, \quad t \in [t_0, +\infty),$$

при произвольном $v \in D$. Фиксируем произвольное $v \in D$. Тогда для неотрицательной функции $z_v(t) = |(w(t), v)|$, $t \in [t_0, +\infty)$, справедливо условие $z_v(t_0) = 0$ и при любом $T > 0$ выпонено неравенство $z_v(t) \le \int\limits_{t_0}^{t} Az_v(s)ds$, где $A = \sup\limits_{t\in[t_0,T]} \|\mathbf{A}(t)v\| < +\infty$ в силу предположения 4. Поэтому $z_v(t) = 0$, $t \in [t_0, T]$, в силу леммы Гронуолла.

$$\text{Итак,} \quad (w(t), v) = 0\ \forall\, t \in [t_0, +\infty), \quad v \in D.$$

Поскольку в силу условий предположения 1 линейное многообразие D оно плотно в пространстве H, то $w(t) = 0\ \forall\, t \in [t_0, T)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предположений* 1–5. *Тогда для любого* $t_0 \ge 0$ *и для любого* $u_0 \in H$ *задача Коши* (14), (15) *имеет единственное обобшенное решение*

$$u(t, t_0, u_0) = \mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t, t_0)u_0, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{17}$$

При этом двухпараметрическое семейство орператоров $\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t,s),\ t \geq s \geq 0$, *в* (17) *может быть определено из условия*

$$\forall\, u \in H,\ \forall T > t_0 \quad \lim_{|\sigma([s,t])|\to 0} \sup_{t_0 \le s \le t \le T} \|\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t,s)u - e^{\mathbf{A}(\xi_{n-1})(\xi_n-\xi_{n-1})} \circ \ldots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)}u\|_H = 0, \tag{18}$$

где $\xi_0,\ldots,\xi_n$ *— точки разбиения* $\sigma([s,t])$ *отрезка* $[s,t]$ *и* $|\sigma([s,t])| = \max\{|\xi_1-\xi_0|,\ldots,|\xi_n-\xi_{n-1}|\}$ *— мелкость этого разбиения.*

Доказательство. Пусть $u \in D$, тогда $e^{s\mathbf{A}(t)}u \in D$ для всех $t \geq 0,\ s \geq 0$.

Пусть $0 \le t_0 \le s < \xi < t \le T < +\infty$, тогда

$$\|e^{\mathbf{A}(\xi)(t-\xi)}e^{\mathbf{A}(s)(\xi-s)}u - e^{\mathbf{A}(s)(t-s)}u\|_H = \|(e^{\mathbf{A}(\xi)(t-\xi)} - e^{\mathbf{A}(s)(t-\xi)})e^{\mathbf{A}(s)(\xi-s)}u\|.$$

Пусть $u,v \in D$, и $0 \le t_0 \le s < \tau < t \le T < +\infty$. Если $f(t) = e^{\mathbf{A}(s)(t-t_0)}v,\ g(t) = e^{\mathbf{A}(\tau)(t-t_0)}u$ при всех $t \in [t_0,T]$, то

$$\frac{d}{dt}(g(t)-f(t)) = \mathbf{A}(\tau)g(t) - \mathbf{A}(s)f(t) = (\mathbf{A}(\tau)-\mathbf{A}(s))g(t) + \mathbf{A}(s)(g(t)-f(t)), \quad t \in [t_0,T].$$

Следовательно, при всех $t \in [t_0,T]$ имеем

$$g(t) - f(t) = e^{\mathbf{A}(s)(t-t_0)}(u-v) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(s)(t-\xi)}(\mathbf{A}(\tau)-\mathbf{A}(s))e^{\mathbf{A}(\tau)(\xi-t_0)}u\,d\xi.$$

Поэтому, согласно (12) и (13), для всех $t \in [t_0,T]$ имеем

$$\|g(t)-f(t)\|_H \le e^{M(t-t_0)}\|u-v\|_H + L|\tau-s|^a \int_{t_0}^{t} e^{M(t-\xi)}\|e^{\mathbf{A}(\tau)(\xi-t_0)}u\|_{D_s}d\xi \le$$

$$\le e^{M(t-t_0)}\|u-v\|_H + Le^{2M(t-t_0)}|t-t_0|^{1+a}\|u\|_{D_{t_0}}. \tag{19}$$

Пусть $\tau = \{\xi_0,\ldots,\xi_N\}$ — разбиение отрезка $[t_0,T]$, т.е. $t_0 = \xi_0 < \ldots < \xi_N = T$. Пусть $u,v \in D$. Определим соответствующее разбиению τ семейство операторов $\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0,t),\ t \in [t_0,T]$, по следующему правилу. Определив по числу $t \ge t_0$ величину $\xi_k = \max\{\xi_j \in \{\xi_0,\ldots,\xi_N\} :\ \xi_j \le t\}$, а по числу $s \in [t_0,t]$ величину $\xi_i = \max\{\xi_j \in \{\xi_0,\ldots,\xi_N\} :\ \xi_j \le s\}$ положим

$$\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t,s)u \equiv \phi_\tau(s,t,u) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}(\xi_k)(t-\xi_k)}e^{\mathbf{A}(\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k-1})}\ldots e^{\mathbf{A}(\xi_i)(\xi_{i+1}-s)}u, & \xi_i < \xi_k, \\ e^{\mathbf{A}(\xi_i)(t-s)}u, & \xi_i = \xi_k. \end{cases}$$

В частности, для любого $t \in [t_0,T]$ имеем

$$\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t,t_0)u \equiv \phi_\tau(t_0,t,u) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}(\xi_k)(t-\xi_k)}e^{\mathbf{A}(\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k-1})}\ldots e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)}u, & \xi_0 < \xi_k, \\ e^{\mathbf{A}(\xi_0)(t-s)}u, & \xi_k = \xi_0. \end{cases} \tag{20}$$

В силу предположений 1, 3 и леммы 2 при каждом разбиении τ отрезка $[t_0,T]$ двухпараметрическое семейство операторов $\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t,s),\ 0 \le s < t < +\infty$, допускает оценку по норме

$$\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t,s)u\|_H \le e^{M(t-s)}\|u\|_H \quad \forall\, u \in H. \tag{21}$$

Оценим разность $e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}_\tau(T,t_0)v$. Положим $w_k = e^{\mathbf{A}(\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k-1})}w_{k-1},\ k = 1,\ldots,N$, и $w_0 = v$. Тогда

$$e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}_\tau(T,t_0)v = e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N-\xi_0)}(u-v) + [e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N-\xi_2)}e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_2-\xi_1)} - e^{\mathbf{A}(\xi_{N-1})(\xi_N-\xi_{N-1})} \circ \ldots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_1)(\xi_2-\xi_1)}]w_1 =$$

$$= e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N-\xi_0)}(u-v) + e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N-\xi_2)}\left(e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_2-\xi_1)} - e^{\mathbf{A}(\xi_1)(\xi_2-\xi_1)}\right)w_1 +$$

$$+ \left(e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N-\xi_3)}e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_3-\xi_2)} - e^{\mathbf{A}(\xi_{N-1})(\xi_N-\xi_{N-1})} \circ \ldots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_2)(\xi_3-\xi_2)}\right)w_2 = \ldots =$$

$$= e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}(u-v) + \sum_{k=1}^{N-1} e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N-\xi_{k+1})}[e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_{k+1}-\xi_k)} - e^{\mathbf{A}(\xi_k)(\xi_{k+1}-\xi_k)}]w_k.$$

Следовательно, согласно (19), (12) и (13), справедливо неравенство

$$\|e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(T,t_0)v\|_H \le e^{M(T-t_0)}\|u-v\|_H + \sum_{k=1}^{N-1} e^{2M(T-\xi_{k+1})}L|\xi_k-\xi_0|^a\|w_k\|_{D_{t_0}}|\xi_{k+1}-\xi_k|.$$

Поскольку в силу (13) $\|w_k\|_{D_{t_0}} \le e^{M(T-t_0)}\|v\|_{D_{t_0}}$ при $k=1,\dots,N$ и так как $|\xi_k-\xi_0|^a \le |T-t_0|^a$ при всех $k=1,\dots,N$, то

$$\|e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(T,t_0)v\|_H \le e^{2M(T-t_0)}[\|u-v\|_H + L(T-t_0)^{a+1}\|v\|_{D_{t_0}}]. \tag{22}$$

Пусть $\tau' = \{s_1,\dots,s_{N'}\}$ – продолжение разбиения τ отрезка $[t_0,T]$. Для расширения τ' разбиения τ однозначно определен упорядоченный по возрастанию набор натуральных чисел $\{j_i,\ i=1,\dots,N\}$ такой, что $\xi_i = s_{j_i}$, $i=1,\dots,N$.

Пусть $\phi_\tau(t_0,t,u_0)$, $\phi_{\tau'}(t_0,t,u_0)$, $t\in[t_0,T]$, – вектор-функции, определенные по разбиениям τ, τ' соответственно и по начальному условию u_0 с помощью равенства (20). Тогда согласно (22) справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbf{U}^{\tau'}_{\mathbf{A}}(\xi_1,t_0)u_0 - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(\xi_1,t_0)u_0\|_H \le Le^{2M(\xi_1-t_0)}(\xi_1-t_0)^{a+1}\|u_0\|_{D_{t_0}}.$$

Следовательно, согласно (22),

$$\begin{aligned}
&\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_2,u_0)-\phi_\tau(t_0,\xi_2,u_0)\|_H = \|\mathbf{U}^{\tau'}_{\mathbf{A}}(\xi_2,\xi_1,\phi_{\tau'}(t_0,\xi_1,u_0)) - e^{\mathbf{A}(\xi_1)(\xi_2-\xi_1)}\phi_\tau(t_0,\xi_1,u_0)\|_H \le\\
&\le e^{2M(\xi_2-\xi_1)}[\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_1,u_0)-\phi_\tau(t_0,\xi_1,u_0)\|_H + L(\xi_2-\xi_1)^{1+a}\|\phi_{\tau'}(t_0,t_1,u_0)\|_{D_{\xi_1}}] \le\\
&\le e^{2M(\xi_2-\xi_1)}[Le^{M(\xi_1-\xi_0)}(\xi_1-\xi_0)^{a+1}\|u_0\|_{D_{\xi_0}} + L(\xi_2-\xi_1)^{1+a}e^{M_1(\xi_1-\xi_0)}\|u_0\|_{D_{\xi_0}}] =\\
&= Le^{2M(\xi_2-\xi_0)}[(\xi_1-\xi_0)^{a+1}+(\xi_2-\xi_1)^{1+a}]\|u_0\|_{D_{\xi_0}}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично, в силу (22), и используя (13), получим

$$\begin{aligned}
&\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_3,u_0)-\phi_\tau(t_0,\xi_3,u_0)\|_H = \|\mathbf{U}^{\tau'}_{\mathbf{A}}(\xi_3,\xi_2,\phi_{\tau'}(t_0,\xi_2,u_0)) - e^{\mathbf{A}(\xi_2)(\xi_3-\xi_2)}\phi_\tau(t_0,\xi_2,u_0)\|_H \le\\
&\le e^{2M(\xi_3-\xi_2)}[\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_2,u_0)-\phi_\tau(t_0,\xi_2,u_0)\|_H + L(\xi_3-\xi_2)^{1+a}\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_2,u_0)\|_{D_{\xi_2}}].
\end{aligned}$$

С учетом оценки (23) это дает

$$\begin{aligned}
&\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_3,u_0)-\phi_\tau(t_0,\xi_3,u_0)\|_H \le e^{2M(\xi_3-\xi_2)}[Le^{2M(\xi_2-\xi_0)}[(\xi_1-\xi_0)^{a+1}+(\xi_2-\xi_1)^{1+a}]\|u_0\|_{D_{\xi_0}} +\\
&+L(\xi_3-\xi_2)^{1+a}\|\phi_{\tau'}(t_0,\xi_2,u_0)\|_{D_{\xi_2}}] \le Le^{2M(\xi_3-\xi_0)}[(\xi_1-\xi_0)^{a+1}+(\xi_2-\xi_1)^{1+a}+(\xi_3-\xi_2)^{1+a}]\|u_0\|_{D_{\xi_0}}.
\end{aligned}$$

Применяя метод индукции, получаем, что для любых $s\in[t_0,T]$ справедлива оценка

$$\|\phi_{\tau'}(t_0,s,u_0)-\phi_\tau(t_0,s,u_0)\|_H \le Le^{2M(T-t_0)}(\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\xi_{k+1})^{1+a})\|u_0\|_{D_{t_0}}.$$

Значит, если мелкость $|\tau|$ разбиения τ достаточно мала, то для всякого продолжения τ' разбиения τ справедлива оценка

$$\sup_{t\in[t_0,T]}\|\phi_{\tau'}(t_0,t,u_0)-\phi_\tau(t_0,t,u_0)\|_H \le Le^{2M(T-t_0)}(T-t_0)|\tau|^a\|u_0\|_{D_{t_0}} \le Le^{2MT}(T-t_0)|\tau|^a\|u_0\|_D.$$

Таким образом, при стремлении к нулю мелкости разбиения промежутка $[t_0,T]$ соответствующая последовательность интегральных композиций (20) сходится в сильной операторной топологии равномерно по $(t_0,t)\in$ $\in[0,T]\times[0,T]\bigcap\mathbb{R}^2_{\le}$ к пределу $\mathbf{U}(t,t_0)u_0$, $(t_0,t)\in[0,T]\times[0,T]\bigcap\mathbb{R}^2_{\le}$, не зависящему от выбора последовательности разбиений. При этом $\|\mathbf{U}(t,t_0)\|_{B(H)} \le e^{M(t-t_0)}\ \forall\ t\ge t_0$ в силу (21).

При фиксированном разбиении $\tau=\{\xi_0,\dots,\xi_N\}$ отрезка $[t_0,T]$ оператор-функция $\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0,t)$, $t\in[t_0,T]$, определенная как композиция полугрупп (20), удовлетворяет интегральному равенству

$$\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0,t)u_0 = u_0 + \int_{t_0}^{t}\mathbf{A}_\tau(s)\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0,s)u_0ds,\ t\in[t_0,T],$$

где

$$\mathbf{A}_\tau(s) = \sum_{k=1}^{N}\chi_{[\xi_{k-1},\xi_k)}(s)\mathbf{A}(\xi_{k-1}),\ s\in[t_0,T]. \tag{24}$$

При этом в силу предположения 3 на любом промежутке $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ разбиения τ имеет место оценка

$$\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0, t_{k+1})u_0\|_{D_{\xi_k}} \le e^{m(\xi_{k+1}-\xi_k)}\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0, t_k)u_0\|_{D_{\xi_k}}$$

и, согласно предположению 4 имеем

$$\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0, t_{k+1})u_0\|_{D_{\xi_{k+1}}} \le e^{B(\xi_{k+1}-\xi_k)}\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0, t_{k+1})u_0\|_{D_{\xi_k}}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{U_A}^{\tau}(t, t_0)u\|_{D_{t_0}} \le e^{M(t-t_0)}\|u\|_{D_{t_0}} \ \forall\, u \in D,\ \forall\, \tau([t_0, T]),\ \forall\, t \in [t_0, T]. \tag{25}$$

Из установленной выше сходимости интегральных композиций операторных семейств с кусочно-постоянными генераторами следует, что существует не зависящий от выбора римановой последовательности разбиений предел $\mathbf{U}(\cdot, t_0)u_0$. Докажем, что если $u_0 \in D$, то предел $\mathbf{U}(\cdot, t_0)u_0$ является решением задачи Коши (14), (15).

При любом разбиении τ кусочно-полугрупповая операторнозначная функция (20) по построению является двухпараметрическим эволюционным семейством операторов. В силу равномерности сходимости $\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}$ при $|\tau| \to 0$ в сильной операторной топологии предельная функция $\mathbf{U}$ непрерывна в сильной операторной топологии на множестве $\mathbb{R}^2_{\le}$ и удовлетворяет эволюционным условиям 1) и 3) определения 5.

Пусть $u_0 \in D$ и пусть τ – разбиение отрезка $[t_0, T]$ точками $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$. Тогда по определению оператор-функции $\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}}(t_0, t),\ t \in [t_0, T]$, справедливо равенство

$$\phi_{\tau}(t_0, t, u_0) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{A}_{\tau}(s)\phi_{\tau}(t_0, s, u_0)ds,\ t \in [t_0, T],$$

где $\mathbf{A}_{\tau}$ – ступенчатая генератор-функция (24). Значит, для каждого $v \in D$ справедливо равенство

$$(\phi_{\tau}(t_0, t, u_0) - u_0, v) = \int\limits_{t_0}^{t} (\phi_{\tau}(t_0, s, u_0), \mathbf{A}_{\tau}(s)v)ds,\ t \in [t_0, T]. \tag{26}$$

Заметим, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sup_{s\in[t_0,T]} \|\mathbf{A}_{\tau}(s)v - \mathbf{A}(s)v\|_H = 0$$

в силу предположения 5 о липшицевости функции $\mathbf{A}$. Поэтому переходя к пределу при $|\tau| \to 0$ в равенстве (26) получаем, что функция $\mathbf{U}(t, s)u_0$ является обобщенным решением задачи Коши на промежутке $[t_0, T]$. При этом поскольку для каждого разбиения τ операторнозначная функция $\mathbf{U}^{\tau}$ удовлетворяет оценке роста (25), то той же оценке удовлетворяет и предельное двухпараметрическое семейство $\mathbf{U}$.

Пусть теперь $u_0 \in H$. Тогда если последовательность $\{u_{0k}\} : \mathbf{N} \to D$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_{0k} - u_0\|_H = 0$, то последовательность $\{\mathbf{U}(t_0, \cdot)u_{0k}\}$ сходится равномерно на $[t_0, T]$ к функции $\mathbf{U}(t_0, \cdot)u_0$ поскольку $\sup\limits_{t\in[t_0,T]} \|\mathbf{U}(t_0, t)\|_{B(H)} \le e^{M(T-t_0)}$). При этом предельная функция удовлетворяет интегральному равенству (16) и, следовательно, является обобщенным решением задачи Коши, единственность которого доказана в лемме 3. Таким образом, $\mathbf{U}(t, s) = \mathbf{U_A}(t, s),\ (t, s) \in \mathbb{R}^2_{\le}$.

4. ВОЗМУЩЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СЕМЕЙСТВ

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t) + f(t),\ t \in (t_0, T), \tag{27}$$

с начальным условием (15). Решением задачи Коши называется функция $u(t, t_0, u_0) \in C([t_0, T), H)$, которая при каждом $v \in D$ удовлетворяет равенству

$$(u(t, t_0, u_0) - u_0, v) = \int\limits_{t_0}^{t} (u(s, t_0, u_0), \mathbf{A}(s)v)ds + \int\limits_{t_0}^{t} (f(s), v)ds,\ t \in [0, T). \tag{28}$$

Пусть $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$ – банахово пространство измеримых по Бохнеру отображений полуоси $\mathbb{R}_+$ в гильбертово пространство $H = L_2(E)$, наделенное нормой $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$, т.е. пополнение по норме $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$ пространства измеримых ступенчатых отображений $\mathbb{R}_+ \to H$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия предположений* 1–5. *Пусть* $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$. *Пусть* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *и* $u_0 \in H$. *Тогда для всех* $t \geq t_0$ *задача Коши для возмущенного уравнения* (27) *с начальным условием* (15) *существует, единственно и задается формулой Дюамеля*

$$u(t) = \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, t_0)u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, s)f(s)ds. \tag{29}$$

Доказательство. Подставив (29) в (28) поменяем порядок интегрироваввния в

$$\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} (\mathbf{U}_\mathbf{A}(s, \xi)f(\xi), \mathbf{A}(s)v)d\xi ds$$

и, учитывая, что

$$\int\limits_{\xi}^{t} (\mathbf{U}_\mathbf{A}(s, \xi)f(\xi), \mathbf{A}(s)v)ds = \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, \xi)f(\xi) - f(\xi)\ \forall\ \xi \in [t_0, t],$$

получим, что функция (29) удовлетворяет условию (28).

Исследуем возмущения уравнений для эволюционных семейств добавлением нестационарного возмушения однопараметрическим семейством $\mathbf{V}(t),\ t \geq 0$, ограниченных линейных операторов умножения на измеримую функцию $V(t),\ t \geq 0$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия предположений* 1–5. *Пусть вещественнозначная функция* $V \in C^1(\mathbb{R}_+, L_\infty(E))$ *такова, что* $\|V(t)\|_{L_\infty(E)} < (\|(\mathbf{A}(t))^{-1}\|_{B(H)})^{-1}$ *при всех* $t \geq 0$ *и оператор* $\mathbf{V}(s)$ *умножения на функцию* $V(s)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{V}(s)D \subset D$ *при всех* $s \geq 0$. *Тогда семейство операторов* $\mathbf{A}(s) + \mathbf{V}(s),\ s \geq 0$, *удовлетворяет условиям прелположений* 1–5 *и порождает эволюционное семейство операторов* $\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t, s),\ (t, s) \in \mathbb{R}^2_\leq$. *При этом для эволюционного семейства* $\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}$ *имеет место кусочно-полугрупповая аппроксимация* (18).

Для доказательства леммы 5 достаточно лишь проверить, что семейство операторов $\mathbf{A}(s) + \mathbf{V}(s),\ s \geq 0$, удовлетворяет условиям предположений 1–5 с тем же плотным в H линейным подпространством D, что и для семейства операторов $\mathbf{A}(s) + \mathbf{V}(s),\ s \geq 0$.

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t) + \mathbf{V}(t)u(t),\ t \in (t_0, T), \tag{30}$$

с начальным условием (15).

Лемма 6. *Пусть двухпараметрическое эволюционное семейство операторов* $\mathbf{U}_\mathbf{A}(t, s),\ (t, s) \in \mathbb{R}^2_\leq$ *порождается задачей Коши* (14), (15) *с семейством операторов* $\mathbf{A}(s),\ s \geq 0$, *удовлетворяющим условиям предположений* 1–5. *Пусть* $V \in L_\infty(\mathbb{R}_+, L_\infty(E))$ *и* $\mathbf{V}(s),\ s \geq 0$, – *семейство операторов умножения на функцию* $V(s) \in L_\infty(E),\ s \geq 0$. *Тогда задача Коши* (30), (15) *порождает двухпараметрическое эволюционное семейство операторов* $\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t, s),\ (t, s) \in \mathbb{R}^2_\leq$.

Доказательство. Решение задачи (30), (15) будем искать в виде (29), где f – неизвестная функция из пространства $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$.

Функция (29) является решением задачи Коши (30) тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{U}_\mathbf{A}(t, t_0)u_0 + \mathbf{V}(t)\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, s)f(s)ds,\ t \in [t_0, T]. \tag{31}$$

Заметим, что если $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$, то тогда $\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, s)f(s)ds \in C([t_0, T], H)$ и

$$\|\int\limits_{t_0}^{\cdot} \mathbf{U}_\mathbf{A}(\cdot, s)f(s)ds\|_{C([t_0,T],H)} \leq (T - t_0)e^{M(T-t_0)}\|f\|_{L_\infty([t_0,T],H)}.$$

Значит, функция $\mathbf{V}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t,s)f(s)ds,\ t\in[t_0,T]$, принадлежит пространству $L_\infty([t_0,T],H)$ и

$$\|\mathbf{V}(\cdot)\int\limits_{t_0}^{\cdot}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(\cdot,s)f(s)ds\|_{L_\infty([t_0,T],H)}\le(T-t_0)e^{M(T-t_0)}\|V\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+,L_\infty(E))}\|f\|_{L_\infty([t_0,T],H)}.$$

В силу условия $V\in L_\infty(\mathbb{R}_+,L_\infty(E))$ и оценки $\|\mathbf{U}(t,t_0)\|_{B(H)}\le e^{M(t-t_0)}$ существует такое $\delta>0$, не зависящее от u_0 и от t_0, что норма оператора

$$\mathbf{K}_\delta:\ f(t)\to\mathbf{V}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t,s)f(s)ds,\ t\in[t_0,t_0+\delta],$$

в пространстве $L_\infty([t_0,t_0+\delta],H)$ меньше единицы. Поэтому уравнение (31) имеет единственное решение

$$f(t)=(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{K}_\delta^j)(\mathbf{V}(t)\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t,t_0)u_0),\ t\in[t_0,t_0+\delta], \tag{32}$$

на отрезке $[t_0,t_0+\delta]$ из пространства $L_\infty([t_0,t_0+\delta],H)$. Значит, задача Коши (30), (15) имеет единственное решение, задаваемое равенством (29) с функцией (32).

В точке $t_0+\delta$ может быть снова поставлена задача Коши для уравнения (30) с начальным условием $u(t_0+\delta)$, имеющая единственное решение на отрезке $[t_0+\delta,t_0+2\delta]$, и так далее. Следовательно, задача Коши (30), (15) имеет единственное решение и задает двухпараметрическое эволюционное семейство операторов $\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s),\ (t,s)\in\mathbb{R}^2_\le$.

5. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Отображение $\mathbf{\Lambda}$, определенное в разделе 2, может быть расширено на множество $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^2_\le,B(H))$ двухпараметрических функций $\mathbf{U}(t,s),\ 0\le s\le t<+\infty$, со значениями в пространстве $B(H)$ и удовлетворяющих условию $\mathbf{U}(t,t)\in\mathcal{A}_m(H),\ t\ge0$. Построим биекцию между пространством $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^2_\le,B(H))$ и множеством $a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc,M})$ марковских непрерывных по базе конечно-аддитивных комплекснозначных мер, заданных на измеримом пространстве $(\mathcal{M}_+(E),\ \mathcal{A}_{Cyl})$ траекторий в пространстве E:

$$\mathbf{\Lambda}:\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^2_\le,B(H))_{\mathcal{A}_m}\to a(\mathcal{A}_{Cyl}),\quad \mathbf{\Lambda}[\mathbf{U}]=\mu_{\mathbf{U}},\quad \operatorname{Im}\mathbf{\Lambda}=a^{Bc,M}(\mathcal{A}_{Cyl}).$$

Как и в формуле (2), всякому двухпараметрическому эволюционному семейству $\mathbf{U}(t,s),\ 0\le s\le t<+\infty$, отображение $\mathbf{\Lambda}$ сопоставляет цилиндрическую меру $\mu^{\mathbf{U}}$ такую, что для любого цилиндрического множества $C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}}$, обладающего базой, содержащей только множества из кольца $\mathcal{R}$, выполняется равенство

$$\mu^{\mathbf{U}}(C_{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}})=(\chi_{B_n},\mathbf{U}(t_n,t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}}\ldots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}(t_1,t_0)\chi_{B_0}), \tag{33}$$

$$n\in\mathbb{N},\quad B_i\in\mathcal{R},\quad \forall\, i=0,\ldots,n.$$

Для $n=0$ и произвольного $t_0\geqslant0$, принимая во внимание, что $\mathbf{U}(t_0,t_0)\in\mathcal{A}_m$ имеет вид $\mathbf{U}(t_0,t_0)(\bullet)=f_{t_0}(x)(\bullet)$, где $f_{t_0}\in\mathbb{L}_\infty(E,\mathcal{R},\lambda,\mathbb{C})$, положим

$$\mu_{\mathbf{U}}(C_B^{t_0})=\begin{cases}(\chi_B,\ \mathbf{U}(t_0,t_0)\chi_B)=\int\limits_B f_{t_0}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), & B\in\mathcal{R},\\ M_0-\int\limits_{E\setminus B}f_{t_0}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x), & B\in\mathcal{A}(\mathcal{R}),\ B\notin\mathcal{R},\end{cases} \tag{34}$$

где константа $M_0=\mu^{\mathbf{U}}(\mathcal{M}(E))$, как и ранее в разд. 2, может быть выбрана произвольно.

Также, как и в работе [8], доказывается, что условия (33) и (34) однозначно определяют цилиндрическую меру $\mu^{\mathbf{U}}$ на алгебре $\mathcal{A}_{Cyl}$, а отображение $\mathbf{\Lambda}:\ \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^2_\le,B(H))\to a(\mathcal{A}_{Cyl})$ инъективно. Также устанавливается, что для любого $\mathbf{U}\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^2_\le,B(H))$ мера $\mu_{\mathbf{U}}$ непрерывна по базе и является марковской.

Как доказано в [11], отображение $\mathbf{\Lambda}$ обратимо и обратное отображение $\mathbf{V}$ всякой марковской непрерывной по базе цилиндрической мере $\mu\in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc,M})$ сопоставляет двухпараметрическое эволюционное семейство $\mathbf{U}_\mu$ посредством равенств

$$\forall\, t_1>t_0\ge0\ (\chi_{B_1},(\mathbf{V}(\mu))(t_1,t_0)\chi_{B_0})_H=\mu(C_{B_0,B_1}^{t_0,t_1})\ \forall\, B_0,B_1\in\mathcal{R}; \tag{35}$$

$$\forall\, t_0 \geq 0 \;\; (\chi_{B_0}, (\mathbf{V}(\mu))(t_0)\chi_{B_0})_H = \mu(C^{t_0}_{B_0}) \;\; \forall\, B_0 \in \mathcal{R}.$$

Теорема 5. *Двухпараметрическое семейство* $\mathbf{U}_\mu(t_0, t),\ 0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, *операторов удовлетворяет эволюционному свойству* 3) *определения* 1

$$\mathbf{U}_\mu(t_2, t_1)\mathbf{U}_\mu(t_1, t_0) = \mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\ \forall\, t_2 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$$

тогда и только тогда, когда соответствующая цилиндрическая мера $\mu \in a(\mathcal{A}^{Bc,M}_{Cyl})$ *удовлетворяет условию сильной марковости.*

Доказательство. Докажем, что если мера $\mu \in a(\mathcal{A}^{Bc,M}_{Cyl})$ является строго марковской, то для оператор-функции $\mathbf{U}_\mu \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^2_{\leq}, B(H))$ выполняется эволюционное свойство 3). Согласно равенству (35) для любых $t_2 \geq t_0 \geq 0$ и любых $B_2, B_0 \in \mathcal{R}$ имеем $(\mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = \mu(C^{t_0,t_2}_{B_0,B_2})$. Поскольку $C^{t_0,t_2}_{B_0,B_2} = C^{t_0,t_1,t_2}_{B_0,E,B_2}$ при всех $t_1 \in [t_0, t_2]$, то

$$(\mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = \mu(C^{t_0,t_1,t_2}_{B_0,E,B_2})\ \forall\, t_1 \in [t_0, t_2].$$

Поскольку мера μ является строго марковской, то $\mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu = \mathbf{U}^{t_0,t_1,t_2}_{\mu;\,B_1}$ при любом $B_1 \in \mathcal{A}_R$. Следовательно, для любых $B_0, B_2 \in \mathcal{R}$ справедлива цепочка равенств

$$(\mathbf{U}_\mu(t_1, t_0)\mathbf{U}_\mu(t_2, t_1)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = (\mathbf{U}^{t_0,t_1,t_2}_{\mu;E}\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = \mu(C^{t_0,t_1,t_2}_{B_0,E,B_2}) = (\mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}),$$

откуда следует выполнение эволюционного условия 3).

Докажем, что если $\mu \in a(\mathcal{A}^{Bc,M}_{Cyl})$ и функция $\mathbf{U}_\mu = \mathbf{V}(\mu)$ удовлетворяет условию 3), то мера μ является строго марковской. Так как мера μ марковская, то выполняется условие (9). Следовательно, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ множества $B_1, \ldots, B_{n-1}$ лежат в кольце $\mathcal{R}$, то для любых $t_n \geq t_{n-1} \geq \ldots \geq t_0 \geq 0$ выполняется равенство

$$\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_{n-1}} = \mathbf{U}^{t_{n-1},t_n}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-1}} \mathbf{U}^{t_{n-2},t_{n-1}}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-2}} \ldots \mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu.$$

Следовательно, равенство (10) выполнено при условии, что все множества $B_1, \ldots, B_{n-1}$ лежат в кольце $\mathcal{R}$.

Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ все множества $B_1, \ldots, B_{n-1}$ лежат в кольце $\mathcal{R}$, за исключением одного из них, имеющего номер $j \in 1, \ldots, n-1$. Тогда для этого номера $j \in 1, \ldots, n$ выполняется, что $B_j \in \mathcal{A}_R$ и $B_j \notin \mathcal{R}$. Потому $B_j^\perp = E\backslash B_j \in \mathcal{R}$ и $\mathbf{P}_{B_j} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{B_j^\perp}$. Следовательно,

$$\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_j^{bot},\ldots,B_{n-1}} = \mathbf{U}^{t_{n-1},t_n}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-1}} \ldots \mathbf{U}^{t_{j+1},t_j}_\mu \mathbf{P}_{B_j^\perp} \mathbf{U}^{t_j,t_{j-1}}_\mu \ldots \mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu.$$

$$\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1}\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_{j-1},B_{j+1},\ldots,B_{n-1}} = \mathbf{U}^{t_{n-1},t_n}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-1}} \ldots \mathbf{U}^{t_{j+1},t_{j+2}}_\mu \mathbf{P}_{B_{j+1}} \mathbf{U}^{t_{j-1},t_{j+1}}_\mu \mathbf{P}_{B_{j-1}} \mathbf{U}^{t_{j-2},t_{j-1}}_\mu \ldots \mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu.$$

Поскольку функция $\mathbf{U}_\mu$ удовлетворяет условию эволюционности 3), верно равенство

$$\mathbf{U}^{t_{j-1},t_{j+1}}_\mu = \mathbf{U}^{t_j,t_{j+1}}_\mu \mathbf{U}^{t_{j-1},t_j}_\mu = \mathbf{U}^{t_j,t_{j+1}}_\mu (\mathbf{P}_{B_j} + \mathbf{P}_{B_j^\perp}) \mathbf{U}^{t_{j-1},t_j}_\mu. \tag{36}$$

Значит, для любых $B_, B_n \in \mathcal{R}$

$$(\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_j,\ldots,B_{n-1}}\chi_{B_n}, B_0) = \mu(C^{t_0,\ldots,t_j,\ldots,t_n}_{B_0,\ldots,B_j,\ldots,B_n}) = \mu(C^{t_0,\ldots,t_j,\ldots,t_n}_{B_0,\ldots,E\backslash B_j^\perp,\ldots,B_n}) =$$

$$= \mu(C^{t_0,\ldots,t_j,\ldots,t_n}_{B_0,\ldots,E,\ldots,B_n}) - \mu(C^{t_0,\ldots,t_j,\ldots,t_n}_{B_0,\ldots,B_j,\ldots,B_n}) = (\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_{j-1},B_{j+1},\ldots,B_{n-1}}\chi_{B_n}, B_0) - (\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_j^{bot},\ldots,B_{n-1}}\chi_{B_n}, B_0) =$$

$$(\mathbf{U}^{t_{n-1},t_n}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-1}} \ldots \mathbf{U}^{t_{j+1},t_{j+2}}_\mu \mathbf{P}_{B_{j+1}} \mathbf{U}^{t_{j-1},t_{j+1}}_\mu \mathbf{P}_{B_{j-1}} \mathbf{U}^{t_{j-2},t_{j-1}}_\mu \ldots \mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu \chi_{B_n}, B_0) -$$

$$-(\mathbf{U}^{t_{n-1},t_n}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-1}} \ldots \mathbf{U}^{t_{j+1},t_j}_\mu \mathbf{P}_{B_j^\perp} \mathbf{U}^{t_j,t_{j-1}}_\mu \ldots \mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu \chi_{B_n}, B_0)$$

С учетом равенства (36) получаем, что

$$(\mathbf{U}^{t_0,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_{n-1},t_n}_{\mu;\,B_1,\ldots,B_j,\ldots,B_{n-1}}\chi_{B_n}, B_0) = (\mathbf{U}^{t_{n-1},t_n}_\mu \mathbf{P}_{B_{n-1}} \ldots \mathbf{U}^{t_{j+1},t_j}_\mu \mathbf{P}_{B_j} \mathbf{U}^{t_j,t_{j-1}}_\mu \ldots \mathbf{U}^{t_1,t_2}_\mu \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}^{t_0,t_1}_\mu \chi_{B_n}, B_0),$$

что в силу произвольности $B_0, B_n \in \mathcal{R}$ означает, что равенство (10) выполнено при условии, что все множества $B_1, \ldots, B_{n-1}$ за исключением, быть может, одного лежат в кольце $\mathcal{R}$. С помощью математической индукции несложно установить, что равенство (10) выполняется при произвольных $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_R$.

Двухпараметрическое эволюционное семейство $\mathbf{U}_\mu(t, t_0),\ 0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, задает операторнозначную функцию $\mathbf{F}^\mu(t) = \mathbf{U}_\mu(t, 0),\ t \geq 0$, тогда и только тогда, когда соответствующая цилиндрическая мера $\mu \in a(\mathcal{A}^{Bc,M}_{Cyl})$ удовлетворяет условию стационарности. Операторнозначная функция $\mathbf{F}^\mu$ является однопараметрической полугруппой операторов тогда и только тогда, когда мера $\mu \in a(\mathcal{A}^{Bc,M,S}_{Cyl})$ является строго марковской.

6. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА И КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Корректная разрешимость задачи Коши (14), (15) установлена при условиях предположений 1–5 на семейство переменных генераторов. Корректная разрешимость возмущенной задачи установлена при различных предположениях о возмущениях источника $f(\cdot)$ и потенциала $\mathbf{V}(\cdot)$. В соответствии с теоремой 5 двухпараметрические эволюционные семейства, порожденные невозмущенной задачей Коши (14), (15), определяют нестационарную строго марковскую непрерывную по базе цилиндрическую меру на пространстве траекторий со значениями в евклидовом пространстве. Для того чтобы получить представление двухпараметрического эволюционного семейства, порожденного возмущенной задачей Коши (30), (15), с помощью континуального интеграла от зависящего от возмущения функционала на траекториях по цилиндрической мере, определяемой невозмущенным эволюционным семейством, нам потребуется наложить достаточно ограничительные предположения относительно оператор-функции, представляющей возмущение, а именно, условия, сформулированные в лемме 5.

Лемма 7. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— самосопряженный оператор в пространстве* H*, полуограниченный сверху. Тогда для любого* $t > 0$ *существует самосопряженный оператор* $\mathbf{\Theta}_t$ *такой, что* $0 \le \mathbf{\Theta}_t \le \mathbf{I}$, $[\mathbf{\Theta}_t, \mathbf{A}] = 0$ *и*

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A}e^{t\mathbf{\Theta}_t\mathbf{A}}. \tag{37}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, – ортогональное разложение единичного оператора, задающее спектральное разложение самосопряженного оператора $\mathbf{A}$. Тогда для каждого вектора $u \in H$ определена монотонно возрастающая от нуля до числа $\|u\|^2$ функция $E_u(\lambda) = (\mathbf{E}(\lambda)u, u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом $D(\mathbf{A}) = \{u \in H : \int\limits_{\mathbb{R}}(1 + \lambda^2)dE_u(\lambda) < +\infty\}$, где интегрирование ведется в смысле Стилтьеса, $(\mathbf{A}u, u) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda dE_u(\lambda)$,

$$(e^{t\mathbf{A}}u, u) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{t\lambda}dE_u(\lambda)$$

для всех $u \in D(A)$. Согласно теореме Лагранжа для каждого $t > 0$ существует непрерывная положительная и не превосходящая единицу функция $\theta_t(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, такая, что $e^{t\lambda} - 1 = t\lambda e^{\theta_t(\lambda)t\lambda}$. Следовательно, при каждом $t > 0$ определен ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор $\mathbf{\Theta}_t = \int\limits_{\mathbb{R}} \theta_t(\lambda)d\mathbf{E}(\lambda)$, не превосходящий единичного оператора, коммутирующий с оператором $\mathbf{A}$ и удовлетворяющий равенству (37).

Лемма 8. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— ограниченный сверху оператором* $M\mathbf{I}$, $M > 0$, *самосопряженный оператор в пространстве* H *и пусть* $u \in D(\mathbf{A})$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *существует* $C_\epsilon > 0$ *такое, что*

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{A}u\|_H \le \epsilon + |t|C_\epsilon\|\mathbf{A}u\|_H \quad \forall\, t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Из условия $u \in D(\mathbf{A})$ следует, что для каждого $\epsilon > 0$ существует число $r_\epsilon > 0$ такое, что $\int\limits_{|\lambda|>r_\epsilon} \lambda^2 dE_u(\lambda) < \frac{\epsilon^2}{4}e^{-2M}$. Тогда для каждого $t \in (-1, 1)$ имеем

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{A}u\|_H^2 = \int\limits_{\mathbb{R}}(e^{t\lambda} - 1)^2\lambda^2 dE_u(\lambda) \le \int\limits_{|\lambda|>r_\epsilon} 4e^{2M}\lambda^2 dE_u(\lambda) + \int\limits_{|\lambda|\le r_\epsilon}(e^{t\lambda} - 1)^2\lambda^2 dE_u(\lambda) \le$$

$$\le \epsilon^2 + \int\limits_{-r_\epsilon}^{r_\epsilon}(e^{tr_\epsilon} - 1)^2\lambda^2 dE_u(\lambda) \le e^2 + t^2r_\epsilon^2e^{2r_\epsilon}\|\mathbf{A}u\|_H^2.$$

Отсюда следует утверждение леммы при $C_\epsilon = r_\epsilon e^{r_\epsilon}$.

Из лемм 6, 7 получаем следствие

Следствие 1. Пусть $\mathbf{A}$ – ограниченный сверху оператором $M\mathbf{I}$, $M > 0$, самосопряженный оператор в пространстве H и пусть $u \in D(\mathbf{A})$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $C_\epsilon > 0$ такое, что

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})u\|_H \le \epsilon|t| + t^2C_\epsilon\|\mathbf{A}u\|_H \quad \forall\, t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Согласно лемме 7 для любого $t > 0$ существует самосопряженный оператор $\mathbf{\Theta}_t$ такой, что $0 \le \mathbf{\Theta}_t \le \mathbf{I}$, $[\mathbf{\Theta}_t, \mathbf{A}] = 0$ и выполняется равенство (37). Следовательно, для каждого $t \in (-1, 1)$ имеем

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})u\|_H = \|(e^{t\mathbf{\Theta}_t\mathbf{A}} - \mathbf{I})t\mathbf{A}u\|_H \le \|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I})t\mathbf{A}u\|_H.$$

Из леммы 8 получаем утверждение следствия.

Лемма 9. *Пусть K — компактное в банаховом пространстве D подмножество семейства векторов* $\{\mathbf{A}(s)u,\ s\in\in[t_0,T]\}$. *Тогда для любого* $\epsilon>0$ *существует* $C_{K,\epsilon}>0$ *такое, что*

$$\|(e^{t\mathbf{A}}-\mathbf{I}-t\mathbf{A})u\|_H\le\epsilon|t|+t^2C_{K,\epsilon}\|\mathbf{A}u\|_H\quad\forall\,u\in K,\ \forall\,t\in(-1,1).$$

Доказательство. Пусть $\epsilon>0$ и $n\in\mathbb{N}$. Тогда существует конечная ϵ-сеть $\{v_1,\dots,v_m\}$ множества K в пространстве D. Для каждого $i\in\{1,\dots,m\}$ в силу следствия 1 существует $C_{i,\epsilon}>0$ такое, что

$$\|(e^{t\mathbf{A}}-\mathbf{I}-t\mathbf{A})v_i\|_H\le\epsilon|t|+t^2C_{i,\epsilon}\|\mathbf{A}u\|_H\quad\forall\,t\in(-1,1).$$

Пусть теперь $u\in K$ и $i_u\in\{1,\dots,m\}:\ \|u-v_{i_u}\|_D\le\epsilon$. Тогда

$$\|(e^{t\mathbf{A}}-\mathbf{I}-t\mathbf{A})(v_{i_u}-u)\|_H\le\|e^{t\mathbf{A}}-\mathbf{I})(v_{i_u}-u)\|_H+\|t\mathbf{A})(v_{i_u}-u)\|_H\le(e^{M(T-t_0)}+1)\|v_{i_u}-u\|_H+t\sup_{s\in[t_0,T]}\|\mathbf{A}(s)(v_{i_u}-u)\|_H=$$
$$=(e^{M(T-t_0)}+1)\|v_{i_u}-u\|_H+te^{BT}\|v_{i_u}-u\|_D\le\frac{1}{n}\epsilon e^B(1+e^{M(T-t_0)}).$$

Рассмотрим множество отображений отрезка $[t_0,T]$ в пространство D

$$\{\{\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(t,t_0)u,\ t_0\le t\le T\},\tau\}\tag{38}$$

при всевозможных разбиениях $\tau=\{\xi_0,\dots,\xi_N\}$ отрезка $[t_0,T]$.

Лемма 10. *Пусть выполнены предположения* 1–5. *Пусть функция* $\mathbf{V}(s),\ s\ge0$, *удовлетворяет условиям леммы* 5. *Пусть* $u\in D$. *Тогда множество*

$$M=\{\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0)u,\ t_0\le t\le T,\tau\}$$

компактно в пространстве D.

Доказательство. Так как операторнозначная функция $\mathbf{A}+\mathbf{V}$ в силу леммы 5 удовлетворяет условиям предположений 1–5, то для нее справедливо утверждение леммы 2 с некоторой константой $M_V>0$. Следовательно, для любого разбиения τ отрезка $[t_0,T]$ векторнозначная функция $\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0)u$ удовлетворяет оценке (25) с константой M_V вместо M. Значит, в силу эквивалентности норм D и D_{t_0}, множество (38) является равномерно ограниченным по норме $\|\cdot\|_D$. Кроме того, оно является равностепенно непрерывным. Ибо всякая функция из семейства непрерывна на отрезке $[t_0,T]$ и на каждом промежутке разбиения функция представляет собой орбиту полугруппы с генератором из семейства $\{\mathbf{A}(s),\ s\in[t_0,T]$, и потому допускает оценку $(<e^{Mt})$. Поэтому для всякого разбиения τ и любых $t_1,t_2\in[t_0,T],\ t_2>t_1$ справедлива оценка

$$\|(\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_2,t_0)-\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_1,t_0))u\|_D=\|(\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_2,t_1)-\mathbf{I})\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_1,t_0)u\|_D.$$

Поэтому для любого $\epsilon>0$ существует число $C_\epsilon>0$ такое, что

$$\|(\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_2,t_0)-\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_1,t_0))u\|_D\le\epsilon+C_\epsilon(t_2-t_1)\|\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t_1,t_0)u\|_D\le\epsilon+C_\epsilon(t_2-t_1)e^{M_VT}\|u\|_D.$$

Следовательно, по теореме Асколи–Арцела, семейство отображений (38) компактно в пространстве $C([t_0,T],D)$, и потому множество значений отображений из семейства (38) компактно в пространстве D.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия предположений* 1–5. *Пусть функция* $\mathbf{V}(s),\ s\ge0$, *удовлетворяет условиям леммы* 5. *Пусть* $0\le t_0\le T<+\infty$. *Тогда существует такое* $a=a(t_0,T)>0$, *что для любого* $u\in D$ *и для любого* $\epsilon>0$ *существует число* $A_\epsilon>0$ *такое, что для любого разбиения* $\tau=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N\}$ *отрезка* $[t_0,T]$ *с мелкостью* $|\tau|<1$ *имеем*

$$\|\left(\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0)-\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,t_0)\right)u\|_H\le a\epsilon+A_\epsilon|\tau|\ \forall\,t\in[t_0,T],$$

где при всех $t\in[t_0,T]$

$$\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,t_0)=e^{(t-\xi_{k(t)})\mathbf{A}(\xi_{k(t)})}e^{(t-\xi_{k(t)})\mathbf{V}(\xi_{k(t)})}e^{(\xi_{k(t)}-\xi_{k(t)-1})\mathbf{A}(\xi_{k(t)-1})}e^{(\xi_{k(t)}-\xi_{k(t)-1})\mathbf{V}(\xi_{k(t)-1})}\dots e^{(\xi_1-\xi_0)\mathbf{A}(\xi_0)}e^{(\xi_1-\xi_0)\mathbf{V}(\xi_0)},$$

$k(t)=\max\{j\in\{1,\dots,N\}:\ \xi_j<t\}$.

Доказательство. Пусть $u\in D$. Для произвольного $t\in[t_0,T]$ имеем

$$\|\left(\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0)-\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,t_0)\right)u\|_H=\|\sum_{j=0}^{k(t)}\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,\xi_{j+1})[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)}-e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]\mathbf{U}^\tau_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j,t_0)u\|_H\le$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} \|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(\xi_N, \xi_{j+1})[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j, t_0)u\|_H. \tag{39}$$

Следовательно,

$$\|\left(\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,t_0)\right)u\|_H \leq \sum_{j=0}^{N-1} e^{M_V(T-\xi_{j+1})}\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j, t_0)u\|_H.$$

В силу условий на операторнозначные функции $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{V}(\cdot)$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0)u\|_{D(\mathbf{A}(\mathbf{t}))} \leq e^{M_V(t-t_0)}\|u\|_{D(\mathbf{A}(t))} \leq e^{(M_V+B)(t-t_0)}\|u\|_D \quad \forall\, t \in [t_0, T].$$

Выберем некоторе $\epsilon > 0$. Тогда в силу компактности множества (38) в пространстве D существует конечный набор точек $\sigma = \{u_1, \ldots, u_M\} \subset D$ такой, что для любого $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ найдется $i_j \in \{1, \ldots, M\}$ такое, что $\|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j, t_0)u - u_{i_j}\|_D < \epsilon$.

В силу лемм 9 и 10, а также с учетом предположения 4 для выбранного $\epsilon > 0$ найдется $C_\epsilon > 0$ такое, что при каждом $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ справедливы неравенства

$$\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]u_{i_j}\|_H \leq$$

$$\leq (\epsilon + C_\epsilon|\tau|)|\xi_{j+1} - \xi_j|\|(\mathbf{A}(\xi_j) + \mathbf{V}(\xi_j))u_{i_j}\|_H \leq (\epsilon + C_\epsilon|\tau|)|t_{j+1} - t_j|e^{M_V\xi_j}\|u_{i_j}\|_D.$$

Значит, при каждом $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ справедлива оценка

$$\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j, t_0)u\|_H \leq$$

$$\leq \|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}](\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j, t_0)u - u_{i_j})\|_H +$$

$$+\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]u_{i_j}\|_H. \tag{40}$$

В силу леммы 7 получим

$$\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}](\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(\xi_j, t_0)u - u_{i_j})\|_H \leq$$

$$\leq (\xi_{j+1} - \xi_j)\left(\|e^{\Theta_1(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))(\xi_{j+1}-\xi_j)}(\mathbf{A}(\xi_j) + \mathbf{V}(\xi_j))(\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(\xi_j, t_0)u - u_{i_j})\|_H +\right.$$

$$\left.+\|e^{\Theta_2\mathbf{A}(\xi_j)(\xi_{j+1}-\xi_j)}\mathbf{A}(\xi_j)(\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(\xi_j, t_0)u - u_{i_j})\|_H + \|e^{\Theta_3\mathbf{V}(\xi_j)(\xi_{j+1}-\xi_j)}\mathbf{V}(\xi_j)(\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(\xi_j, t_0)u - u_{i_j})\|_H\right) \leq be^{M_V\xi_j}\epsilon$$

при некотором $b = b(M_V, V, T, u) > 0$. Следовательно, из (40) следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует $B_\epsilon > 0$ такое, что при всех $j \in 0, \ldots, N-1$ получим

$$\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)}e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}]\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(\xi_j, t_0)u\|_H \leq (b\epsilon + B_\epsilon|\tau|)(\xi_{j+1} - \xi_j)\|u\|_D.$$

Поэтому, в силу (39) имеем

$$\|\left(\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,t_0) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,t_0)\right)u\|_H \leq \sum_{j=0}^{N-1}(b\epsilon + B_\epsilon\|\tau\|)|\xi_{j+1} - \xi_j|\|u\|_D \leq (b\epsilon + B_\epsilon\|\tau\|)|T - t_0|\|u\|_D$$

и, значит, справедливо утверждение леммы 11.

Лемма 11 позволяет получить аппроксимацию возмущенного эволюционного семейства посредством итераций невозмущенного с эволюционным семейством, порожденным возмущением. В случае независящих от времени генераторов и возмущений этот результат совпадает с формулой Троттера. Именно для приближения такими итерациями возмущенного эволюционного семейства нам потребуются наиболее жесткие ограничения на возмущения, сформулированные в лемме 5.

Теорема 6 (обобщенная формула Троттера). *Пусть выполнены условия предположений* 1–5. *Пусть функция* $\mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, *удовлетворяет условиям леммы* 5. *Тогда для любого* $t_0 \geq 0$, *любого* $T \in (t_0, +\infty]$ *и для любого* $u_0 \in H$ *имеем*

$$\lim_{|\sigma([s,t])|\to 0}\ \sup_{t_0 \leq s \leq t \leq T} \|\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s)u_0 - e^{\mathbf{A}(\xi_{n-1})(\xi_n-\xi_{n-1})}e^{\mathbf{V}(\xi_{n-1})(\xi_n-\xi_{n-1})} \circ \ldots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)}e^{\mathbf{V}(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)}u_0\|_H = 0, \tag{41}$$

где $\xi_0, \ldots, \xi_n$ — *точки разбиения* $\sigma([s,t])$ *отрезка* $[s,t]$ *и* $|\sigma([s,t])| = \max\{|\xi_1 - \xi_0|, \ldots, |\xi_n - \xi_{n-1}|\}$ — *мелкость этого разбиения.*

Доказательство. Пусть $u \in D$, тогда $e^{\tau \mathbf{A}(t)}u$, $e^{\tau \mathbf{V}(t)}u \in D$ для всех $t \geq 0$, $\tau > 0$ и множество M_u компактно в D в силу леммы 10. Выберем некоторое $\epsilon > 0$. Фиксируем некоторое $T > 0$.

В силу теоремы 4 двухпараметрическое эволюционное семейство $\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2_{\leq}$, определено и для любого $T > 0$ выполнено

$$\lim_{|\tau([0,T])|\to 0} \left(\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s))u\|_H \right) = 0,$$

где $\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s)$ – кусочно-полугрупповое двухпараметрическое эволюционное семейство, определенное по операторнозначной функции $\mathbf{A}+\mathbf{V}$ для каждого разбиения $\tau = \tau([0,T])$ по формуле (20). Поэтому существует такое $\delta > 0$, что при всех $\tau : |\tau| < \delta$ выполняется оценка

$$\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s))u\|_H < \frac{\epsilon}{4}.$$

Поскольку $u \in D$, то в силу леммы 11 существует постоянная $A_\epsilon > 0$, такая, что для любых $(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T$ выполняется неравенство

$$\|(\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,s))u\|_H \leq \frac{\epsilon}{4} + A_\epsilon|\tau|.$$

Следовательно, найдется такое $\sigma \in (0,\delta)$, что для всех разбиений $\tau : |\tau| < \sigma$ выполняется неравенство

$$\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|(\mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,s) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s))u\|_H < \frac{3\epsilon}{4}. \tag{42}$$

Пусть теперь $u \in H$. Тогда найдется такое $u_0 \in D$, что $\|u - u_0\|_H \leq \frac{\epsilon}{8}e^{-T(M+B)}$, поэтому

$$\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|(\mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,s)(u-u_0)\|_H < \frac{\epsilon}{8}; \quad \|\mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s))(u-u_0)\|_H < \frac{\epsilon}{8}.$$

Фиксировав такое u_0 получим, что найдется такое $\sigma \in (0,\delta)$, что для всех разбиений $\tau : |\tau| < \sigma$ выполняется неравенство (42). Следовательно, найдется такое $\sigma > 0$, что для любого разбиения $\tau : |\tau| < \sigma$ справедливо неравенство

$$\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|(\mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}(t,s) - \mathbf{U}^{\tau}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t,s))u\|_H < \epsilon.$$

Выразим значение меры $\mu^{\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}}$ на произвольном цилиндрическом множестве из Cyl с базой из принадлежащих кольцу $\mathcal{R}$ множеств, через значение меры $\mu^{\mathbf{U}_{\mathbf{A}}}$ на множествах алгебры $\mathcal{A}_{Cyl}$. Положим $\mu^{\mathbf{U}_{\mathbf{A}}\circ\mathbf{G}} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}_{\mathbf{A}} \circ \mathbf{G})$, где $(\mathbf{U}_{\mathbf{A}} \circ \mathbf{G})(t,s) = \mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t,s)\mathbf{G}(t,s)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2_{\leq}$ и

$$\mathbf{G}(t,s) = e^{\int_s^t \mathbf{V}(\xi)d\xi}, \ (t,s) \in \mathbb{R}^2_{\leq}.$$

Фиксируем произвольное цилиндрическое множество $C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}} \in Cyl$ с базой, состоящей из множеств, принадлежащих кольцу $\mathcal{R}$. Тогда согласно (33) имеем

$$\mathbf{\Lambda}[\mathbf{U}_{\mathbf{A}}](C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}) = \mu^{\mathbf{U}_{\mathbf{A}}}(C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}) = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_n,t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_1,t_0)\chi_{B_0}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

$$\mu^{\mathbf{U}_{\mathbf{A}}\circ\mathbf{G}}(C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}) = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_n,t_{n-1})\mathbf{G}(t_n,t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_1,t_0)\mathbf{G}(t_1,t_0)\chi_{B_0}), \tag{44}$$

$$B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall\, i = 0,\dots n.$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$. Фиксируем некоторое $T > 0$ и рассмотрим $(t,s) \in \mathbb{R}^2_{\leq}$ такие, что $0 \leq s \leq t \leq T$. Рассмотрим цилиндрические множества $C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}$ с $\mathbf{t} \subset [\mathbf{0},\mathbf{T}]$.

Пусть $S_\infty(E)$ – пространство простых измеримых относительно сигма-алгебры $\mathcal{A}_R$ комплекснозначных функций на пространстве E, наделенное sup-нормой. Пусть $\mathbb{L}_\infty(E)$ – пополнение пространства $S_\infty(E)$, являющееся подпространством банахова пространства $L_\infty(E)$. Символом $\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$ обозначим пространство, являющееся пополнением по sup-норме пространства $S_\infty(\mathbb{R}_+, S_\infty(E))$ простых измеримых отображений полуоси $\mathbb{R}_+$ в банахово пространство $\mathbb{L}_\infty(E)$ (см. [8]).

Поэтому из условия $V \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$ следует, что существуют последовательность $\{\tau_l\}$ разбиений отрезка $[0,T]$ набором точек $\{s^l_0, s^l_1, \dots, s^l_{K_l}\}$ на конечную совокупность дизъюнктных промежутков $\{\Delta^l_1, \dots, \Delta^l_{K_l}\}$, последовательность $\{\pi_l\}$ разбиений пространства E на конечную совокупность дизъюнктных подмножеств $\{B^l_1, \dots, B^l_{M_l}\}$

из σ-алгебры $\mathcal{A}_R$ и последовательность наборов комплексных чисел $\alpha_l = \{\alpha^l_{k,m},\ k \in 1,\dots,K_l,\ m \in 1,\dots,M_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\lim_{l\to\infty}\left(\| \, \|V_l(t) - V(t)\|_{\mathbb{L}_\infty(E))}\|_{L_\infty([0,T])}\right) = 0, \tag{45}$$

где $\{V_l\}:\ \mathbb{N} \to S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{S}_\infty(E))$ – последовательность простых функций вида

$$V_l(s,x) = \sum_{k=1}^{K_l}\sum_{m=1}^{M_l} \alpha^l_{k,m}\chi_{\Delta^l_k}(t)\chi_{B^l_m}(x),\ x \in E.$$

Следовательно, $\|\,\|\mathbf{V}_l(t) - \mathbf{V}(t)\|_{B(H)}\|_{L_\infty([0,T])} \to 0$ при $l \to \infty$, и потому

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{t,s\in[0,T]}\|\mathbf{G}(t,s) - \mathbf{G}_l(t,s)\|_{B(H)} = 0 \tag{46}$$

при каждом $T > 0$, где $\mathbf{G}_l(t,s) = \exp(\int\limits_s^t \mathbf{V}_l(\xi)d\xi),\ (t,s) \in \mathbb{R}^2_\le$ при каждом $l \in \mathbb{N}$.

Тогда согласно (44) для произвольного фиксированного множества $C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}} \in Cyl$ при $\mathbf{t} \subset [\mathbf{0},\mathbf{T}]$ имеет место следующая поточечная сходимость цилиндрических мер:

$$\boldsymbol{\Lambda}[\mathbf{U}_{\mathbf{A}} \circ \mathbf{G}](C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}) = \lim_{l\to\infty}\left(\boldsymbol{\Lambda}[\mathbf{U}_{\mathbf{A}} \circ \mathbf{G}_l](C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}})\right). \tag{47}$$

При каждом $l \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Lambda}[\mathbf{U}_{\mathbf{A}} \circ \mathbf{G}_l](C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}) = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_n,t_{n-1})\mathbf{G}_l(t_n,t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}}\dots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_1,t_0)\mathbf{G}_l(t_1,t_0)\chi_{B_0}) = \\ = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_n,t_{n-1})\exp\left(\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{V}_l(\xi)d\xi\right)\mathbf{P}_{B_{n-1}}\dots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mathbf{A}}(t_1,t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{V}_l(\xi)d\xi\right)\chi_{B_0}).\end{gathered} \tag{48}$$

Для фиксированного множества $C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}$ на отрезке выбран фиксированный набот точек $\mathbf{t} = \{\mathbf{t_0},\mathbf{t_1},\dots,\mathbf{t_n}\} \subset [\mathbf{0},\mathbf{T}]$. При каждом $l \in \mathbb{N}$ функция $V_l \in S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{S}_\infty(E))$ из удовлетворяющей условию (45) последовательности $\{V_l\}$ имеет вид

$$V_l(s,x) = \sum_{k=1}^{K_l}\sum_{m=1}^{M_l} \alpha^l_{k,m}\chi_{\Delta^l_k}(t)\chi_{B^l_m}(x),\ x \in E, \tag{49}$$

где $\{\Delta^l_1,\dots,\Delta^l_{K_l}\}$ – разбиение отрезка $[0,T]$ на промежутки набором точками $\{s^l_0, s^l_1,\dots,s^l_{K_l}\}$. Причем при каждом $l \in \mathbb{N}$ можно, при необходимости, дополнительно разбить промежутки $\Delta^l_1,\dots,\Delta^l_{K_l}$ таким образом, что $\{t_0,t_1,\dots,t_n\} \subset \{s^l_0, s^l_1,\dots,s^l_{K_l}\}$. За счет этого для каждого $k \in \{1,\dots,K_l\}$ определено единственное $j(k) \in 1,\dots,n$ такое, что $\mathrm{int}(\Delta^l_k) \subset [t_{j(k)-1}, t_{j(k)})$. Для каждого промежутка $[t_{j-1},t_j)$ из соответствующего фиксированному набору временных индексов $\mathbf{t}$ разбиения $\{[t_0,t_1),\dots,[t_{n-1},t_n)\}$ промежутка $[t_0,t_n) \subset [0,T]$ положим

$$\mathbb{K}^l_j = \{k \in \{1,\dots,K_l\} : \Delta^l_k \subset [t_{j-1},t_j)\},\ j = 1,\dots,n.$$

Тогда для каждого интеграла в показателях экспонент в формуле (48) при всех $j \in \{1,\dots,n\}$ имеем

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} V_l(\xi,x)d\xi = \sum_{k\in\mathbb{K}^l_j} V_l|_{\Delta^l_k}(x)\,|\Delta^l_k| = \sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}\sum_{m=1}^{M_l}\alpha^l_{k,m}\chi_{B^l_m}(x)\,|\Delta^l_k|, \quad x \in E,$$

значит,

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\mathbf{V}_l(\xi)d\xi = \sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}\sum_{m=1}^{M_l}\alpha^l_{k,m}\mathbf{P}_{B^l_m}\,|\Delta^l_k|,$$

где $\mathbf{P}_B$ – ортогональный проектор в пространстве H, действующий как оператор умножения на индикаторную функцию измеримого множества $B \in \mathcal{A}_R$. Поэтому с учетом, что $\mathbf{P}_{B^l_k}\mathbf{P}_{\mathbf{B^l_m}} = \mathbf{P}_{B^l_k\bigcap B^l_m} = \mathbf{P}_{B^l_m}\delta_{k,m}$, при всех $j \in \{1,\dots,n\}$ имеем

$$\exp\left(\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\mathbf{V}(\xi)d\xi\right) = \exp\left(\sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}\sum_{m=1}^{M_l}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m}\mathbf{P}_{B^l_m}\right) = \sum_{m=1}^{M_l}\exp\left(\sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m}\right)\mathbf{P}_{B^l_m}.$$

Поэтому из (48) получаем

$$\mathbf{\Lambda}[\mathbf{U}_\mathbf{A}\circ\mathbf{G}_l](C^{\mathbf{t}}_{\mathbf{B}}) = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_\mathbf{A}(t_n, t_{n-1})\mathbf{G}_l(t_n, t_{n-1})\mathbf{P}_{B_{n-1}}\dots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_\mathbf{A}(t_1, t_0)\mathbf{G}_l(t_1, t_0)\chi_{B_0}) =$$

$$= (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_\mathbf{A}(t_n, t_{n-1})\left[\sum_{m_n=1}^{M_l}\exp\left(\sum_{k\in\mathbb{K}^l_n}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m_n}\right)\mathbf{P}_{B^l_{m_n}}\right]\mathbf{P}_{B_{n-1}}\dots\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_\mathbf{A}(t_1, t_0)\left[\sum_{m_1=1}^{M_l}\exp\left(\sum_{k\in\mathbb{K}^l_1}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m_1}\right)\mathbf{P}_{B^l_{m_1}}\right]\chi_{B_0}) =$$

$$= \sum_{m_n=1}^{M^l}\cdots\sum_{m_1=1}^{M^l}\prod_{j=1}^{n}\exp\left(\sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m_j}\right)(\chi_{B_n}, \mathbf{U}_\mathbf{A}(t_n, t_{n-1})\mathbf{P}_{B^l_{m_n}\cap B_{n-1}}\dots\mathbf{P}_{B^l_{m_2}\cap B_1}\mathbf{U}_\mathbf{A}(t_1, t_0)\mathbf{P}_{B^l_{m_1}\cap B_0}\chi_{B_0}) =$$

$$= \sum_{m_n=1}^{M^l}\cdots\sum_{m_1=1}^{M^l}\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m_j}\right)\mu^{\mathbf{U}_\mathbf{A}}\left(C^{t_0,\ \dots,\ t_{n-1},\ t_n}_{B_0\cap B^l_{j_0},\dots,\ B_{n-1}\bigcap B^l_{j_{n-1}},\ B_n}\right). \tag{50}$$

Теорема 7. *Пусть $\boldsymbol{U}_\mathbf{A} : \mathbb{R}^2_\le \to B(H)$ — двухпараметрическое эволюционное семейство, удовлетворяющее условиям предположений* 1–5 *и* $T \in (0, +\infty)$. *Пусть* $V \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$, $\|V(t)\|_{L_\infty(E)} < (\|(\mathbf{A}(t))^{-1}\|_{B(H)})^{-1}$ *при всех* $t \ge 0$ *и* $\mathbf{V}(s)D \subset D$ *при всех* $s \ge 0$. *Тогда для любых* $u, v \in H$ *имеет место следующая формула Фейнмана–Каца:*

$$(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(T, 0)u, v) = \int\limits_{\mathcal{M}([0,T],E)}\exp\left(\int\limits_0^T V(s, \gamma(s))ds\right)u(\gamma(0))\bar{v}(\gamma(T))d\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{U}_\mathbf{A})(\gamma), \tag{51}$$

где правая часть (51) *является символом, обозначающим предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty}\left[\int\limits_{\mathcal{M}([0,T],E)}\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\frac{j-1}{n}T}^{\frac{j}{n}T}V_l(s, \gamma(s))ds\right)u(\gamma(0))\bar{v}(\gamma(T))d\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}_\mathbf{A})(\gamma)\right]\right). \tag{52}$$

Доказательство. Рассмотрим значения $(\chi_{B_n}, \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(T, 0)\chi_{B_0})$ для произвольных $B_0, B \in \mathcal{R}$ — этого будет достаточно, поскольку пространство $S(\mathcal{R})$ всюду плотно в пространстве H.

Рассмотрим функцию

$$\mathbf{F}(t, s) = \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, s)\exp\left(\int\limits_s^t\mathbf{V}(\xi)d\xi\right) = \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, s)\mathbf{G}_\mathbf{V}(t, s),\ (t, s) \in \mathbb{R}^2_\le.$$

Согласно теореме 6, если $\{\tau_n\}$ – риманова последовательность разбиений отрезка $[0, T]$ точками $\xi^n_j = \frac{T}{n}j$, $j = 0, 1, \dots, n$, то при любом $B_0 \in \mathcal{R}$ имеет место равенство (41), т.е.

$$\mathbf{U}_{\mathbf{A}\mathbf{V}}(t, 0)\chi_{B_0} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{F}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{F}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\dots\mathbf{F}(\xi^n_1, \xi^n_0)\chi_{B_0} = \tag{53}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{U}_\mathbf{A}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{G}_\mathbf{V}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\mathbf{G}_\mathbf{V}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\dots\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_1, \xi^n_0)\mathbf{G}_\mathbf{V}(\xi^n_1, \xi^n_0)\chi_{B_0},$$

где $K_n(t) = \max\{j \in \{0, 1, \dots, n\} : \xi^n_j < t\}$. Следоватетельно, если $\{V_l\}$ – последовательность простых, т.е. имеющих вид (49), функций аппроксимирующих функцию V в смысле условия (45), то в силу (47), при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{U}_\mathbf{A}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{G}_\mathbf{V}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\mathbf{G}_\mathbf{V}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\dots\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_1, \xi^n_0)\mathbf{G}_\mathbf{V}(\xi^n_1, \xi^n_0)\chi_{B_0} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\mathbf{U}_\mathbf{A}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{G}_{\mathbf{V}_l}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\mathbf{G}_{\mathbf{V}_l}(\xi^n_{K_n(t)}, \xi^n_{K_n(t)-1})\dots\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_1, \xi^n_0)\mathbf{G}_{\mathbf{V}_l}(\xi^n_1, \xi^n_0)\chi_{B_0}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ положим $B_n = B \in \mathcal{R}$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ из (53) с помощью (50) получаем

$$(\chi_B,\ \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t, 0)\chi_{B_0}) = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{l\to\infty}(\chi_{B_n}, \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, \xi^n_{K_n(t)})\mathbf{G}_{\mathbf{V}_l}(t, \xi^n_{K_n(t)})\dots\mathbf{U}_\mathbf{A}(\xi^n_1, \xi^n_0)\mathbf{G}_{\mathbf{V}_l}(\xi^n_1, \xi^n_0)\chi_{B_0})\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{l\to\infty}\sum_{m_n=1}^{M^l}\cdots\sum_{m_1=1}^{M^l}\exp(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{K}^l_j}|\Delta^l_k|\alpha^l_{k,m_j})\mu^{\mathbf{U}_\mathbf{A}}\left(C^{t_0,\ \dots,\ t_{n-1},\ t_n}_{B_0\cap B^l_{j_0},\dots,\ B_{n-1}\bigcap B^l_{j_{n-1}},\ B_n}\right)\right]. \tag{54}$$

Поскольку при каждом $l \in \mathbb{N}$ функция V_l имеет вид (49), то при любых $n, l \in \mathbb{N}$ функция

$$\Phi(\gamma) = \chi_{B_n}(\gamma(T))\chi_{B_0}(\gamma(0)) \exp \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\frac{j-1}{n}T}^{\frac{j}{n}T} V_l(s, \gamma(s))ds \right), \quad \gamma \in \mathcal{M}([0,T],E),$$

стоящее под знаком предела в (52) при $u = \chi_{B_0}$, $v = \chi_{B_n}$, может принимать лишь конечное множество значений на пространстве $\mathcal{M}([0,T],E)$ и является ступенчатой функцией, измеримой относительно алгебры $\mathcal{A}_{Cyl}$. Следовательно, функция $\Phi: \ \mathcal{M}([0,T],E) \to \mathbb{C}$ интегрируема по мере $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U_A})$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathcal{M}([0,t],E)} \exp \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\frac{j-1}{n}t}^{\frac{j}{n}t} V_l(s, \gamma(s))ds \right) \chi_{B_0}(\gamma(0))\chi_{B_n}(\gamma(t))d\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U_A})(\gamma) =$$

$$= \sum_{m_n=1}^{M^l} \cdots \sum_{m_1=1}^{M^l} \exp(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_j}^l) \mu^{\mathbf{U_A}} \left(C_{B_0 \cap B_{j_0}^l, \dots, B_{n-1} \bigcap B_{j_{n-1}}^l, B_n}^{t_0, \quad \dots, \quad t_{n-1}, \quad t_n} \right),$$

что совпадает с выражением (54).

Таким образом, получены аппроксимации двухпараметрического эволюционного семейства $\mathbf{U_{A+V}}$ интегралами от линейных комбинаций индикаторных функций по мере $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U_A})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
3. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в случайных динамических системах. М.: Наука, 1979.
4. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* Об аппроксимации локального по времени винеровского процесса функционалами от случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 2021. Т. 66. № 1. С. 73–93.
5. *Платонова М.В.* Аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора высокого порядка // Теория вероятн. и ее примен. 2022. Т. 67. № 1. С. 81–99.
6. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: Изд. УРСС, 2015.
7. *Маслов В.П., Чеботарев А.М.* Определение клнтинуального интеграла Фейнмана в P-представлении // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 37–38.
8. *Orlov Yu.N., Sakbaev V.Z., Shmidt E.V.* Compositions of Random Processes in a Hilbert Space and Its Limit Distribution // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 4. P. 1432–1447.
9. Егоров А.Д., Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М.: Физматлит, 2006.
10. *Кальметьев Р.Ш.* Аппроксимация решений многомерного уравнения Колмогорова с помощью итераций Фейнмана-Чернова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2023. 021, 15 с.
11. *Orlov Yu.N., Sakbaev V.Z., Shmidt E.V.* Feynman–Kac Formulas for Difference–Differential Equations of Retarded Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V. 45. № 6. P. 2582–2591.
12. *Plyashechnik A.S.* Feynman formula for Schrodinger-type equations with time- and space-dependent coefficients // Russian J. of Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 340–359.
13. *Sakbaev V.Z., Tsoy N.V.* Analogue of Chernoff Theorem for Cylindrical Pseudomeasures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 12. P. 2369–2382.

FEYNMAN–KAC FORMULAS FOR SOLUTIONS OF NONSTATIONARY PERTURBED EVOLUTION EQUATIONS

Yu. N. Orlov[a,]* and V. Zh. Sakbaev[b,]**

[a] M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047 Russia
[b] MI named after. V.A. Steklov RAS, Moscow, 119991 Russia
**e-mail: ov3159f@yandex.ru*
***e-mail: fumi2003@mail.ru*

Received: 22 August 2024
Revised: 29 September 2024
Accepted: 30 September 2024

Abstract. A bijective mapping of the space of operator-valued functions into the set of complex-valued finite additive cylindrical measures on the space of trajectories is constructed and studied. The conditions under which the Cauchy problem for the first order equation with a variable operator generates a two-parameter evolutionary family of operators are found. A representation of the solution to the Cauchy problem with a variable perturbed generator by means of a continuum integral of the perturbation-defined functional on the trajectory space over a cylindrical pseudomeasure specified by an unperturbed two-parameter evolutionary family of operators is obtained.

Keywords: evolutionary family of operators, one-parameter semigroup, finite-additive measure, Markov process, Chernoff theorem, Feynman-Kac formula