ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 1, с. 36–49

УДК 517.956.4

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ВЛИЯНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

© 2025 г. А. И. Денисов[1,*], И. В. Денисов[1]

[1] 300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия
*e-mail: den_tspu@mail.ru

Поступила в редакцию 10.03.2024 г.
Переработанный вариант 10.03.2024 г.
Принята к публикации 26.09.2024 г.

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Предполагается, что в угловых точках $(k,0)$ прямоугольника Ω, где $k = 0$ или 1, функция $F(u) = F(u,k,0,0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - u_0^3, \quad \text{где} \quad u_0 = u_0(k) < 0.$$

Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций. Ранее был рассмотрен случай, когда граничное значение φ в угловых точках отделено от точки перегиба $u = 0$ условием

$$u_0(k) < \varphi(k) \le \frac{u_0(k)}{2} < 0,$$

при котором на роль барьерных подошли функции "простейшего" вида, пригодные сразу во всей рассматриваемой области. В настоящей работе рассматривается случай

$$\frac{u_0(k)}{2} < \varphi(k) < 0,$$

при котором область приходится разбивать на части, в каждой подобласти строить свои барьерные функции с учетом их непрерывной стыковки на общих границах подобластей, а затем проводить сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений. В результате получается полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике. Библ. 15.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466925010047, **EDN**: CDCFNP

ВВЕДЕНИЕ

Сингулярно возмущенные задачи с малым параметром для уравнений с частными производными встречаются в различных задачах математической физики. В их решениях, как правило, возникают пограничные слои, где происходит резкий переход между разными характерными модами. Типичный пример — это задачи обтекания тел вязкой жидкостью, когда вблизи поверхности тела скорость потока резко падает до нуля. Другой пример — это задачи диффузии, когда на границе области поддерживается постоянная концентрация или постоянный поток. В статье рассматриваются именно такие задачи, когда вблизи угловых точек прямоугольника возникают пограничные слои, сшивающие решение для начальных и граничных условий. Проводится подробное описание угловых пограничных слоев при кубических нелинейностях в уравнении.

Такие задачи имеют более чем полувековую историю. Общая теория для линейных параболических уравнений была построена В.Ф. Бутузовым в середине 1970-х годов. Для нелинейных эллиптических и параболических уравнений с краевыми условиями первого рода разработка теории началась в работах И.В. Денисова в 1990-х годах. В настоящее время достаточно подробно исследованы только задачи с квадратичными нелинейностями. Кубические нелинейности исследованы лишь в частных случаях.

Нелинейный метод угловых пограничных функций является естественным обобщением (линейного) метода угловых пограничных функций В.Ф. Бутузова (см. [1], [2]). При построении асимптотических разложений решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями первого рода (задача Дирихле) приходится доказывать существование подходящих решений нелинейных уравнений. Это делается с помощью барьерных функций, построение которых представляет основную проблему (см. [3]–[9]). В настоящее время разработаны возможные виды "простейших" гладких барьерных функций для оценки решений нелинейных задач, определяющих главные члены угловой части асимптотики. Если же гладкие барьеры не удается построить сразу во всей рассматриваемой области, то предполагается выполнение следующих шагов:

1) разбиение области на части;
2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи;
3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей;
4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

Для обоснования построенной асимптотики решения применяется универсальный метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова (см. [10]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где ε – малый положительный параметр. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. *Функции $F(u,x,t,\varepsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений*

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. *Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar u_0(x,t)$.*

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. *Производная $F'_u(\bar u_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.*

Условие 4. *Начальная задача*

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar u_0(x,0)+\Pi_0,x,0,0), \quad \Pi_0(x,0) = \varphi(x) - \bar u_0(x,0),$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ при $\tau \ge 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$ (здесь параметр $x\in[0,1]$).

Условие 5. *Для систем*

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\bar u_0(k,t)+z_1,k,t,0), \tag{4}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar u_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1,z_2) = (0,0)$ при $y\to\infty$ (здесь t — параметр, $k = 0$ или 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1,z_2) = (0,0)$ является точкой покоя типа седла систем (4).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удается. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1)–(3) требуются дополнительные условия, которые будут сформулированы ниже.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon\to 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x,t,\varepsilon) = \bar u + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{5}$$

Здесь $\bar{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω, Π, Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана и подробно описана в [11]. Однако, для построения угловых пограничных функций требуются обозначения, вводимые при построении предыдущих частей асимптотики. В связи с этим процедуру построения регулярной и погранслойной частей асимптотики всякий раз приходится схематично повторять.

В уравнении (1) функция F заменяется выражением, аналогичным (5):

$$F(u, x, t, \varepsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) подставляются в уравнение (1), которое разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые. Регулярная часть асимптотики строится в виде ряда по степеням ε:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \, \bar{u}_k(x, t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальным и граничными условиями. Погранслойные функции Π, Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q^*_k(\xi_*, t),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1 - x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

суть растянутые переменные.

С целью устранения невязок с начальным и граничными условиями вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi, \tau, \varepsilon)$ и $P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon)$, нахождение которых доставляет основные трудности при решении поставленной задачи. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P^*_k(\xi_*, \tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi, \tau)$ ставится в первой четверти $\mathbb{R}^2_+$ плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0\right) - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right) - F\left(\bar{u}_0 + Q_0\right), \tag{7}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{8}$$

$$P_0(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{9}$$

где для краткости используются обозначения

$$F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0), \quad \Pi_k = \Pi_k(0, \tau), \quad Q_k = Q_k(\xi, 0), \quad P_k = P_k(\xi, \tau).$$

Для функций $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, в области $\mathbb{R}^2_+$ получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0\right) P_k + h_k, \tag{10}$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0), \tag{11}$$

$$P_k(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{12}$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \leq C\exp(-\kappa(\xi + \tau)), \tag{13}$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0, \ldots, P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для угловых погранфункций $P^*_k(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся аналогично.

В дальнейшем для определенности считается, что в каждой угловой точке граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. (Случай $\varphi < \bar{u}_0$ сводится к предыдущему с помощью замены u на $-u$.)

Для доказательства существования решения задачи (7)–(9) используется метод верхних и нижних решений (см. [12]–[14]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе } \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \le Z \le Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \le 0, \quad L(Z_-) \ge 0, \quad Z_- \le Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \le h \le Z_+.$$

При исследовании задачи (7)–(9) будет удобно пользоваться обозначением

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0).$$

Тогда задача (7)–(9) примет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{14}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{15}$$

$$P_0(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{16}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагается, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω, где $k = 0$ или 1, функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

В этом случае функция $F(u)$ при $u > \bar{u}_0$ сначала выпукла вверх, в точке $u = 0$ имеет перегиб и далее становится выпуклой вниз. В работе [9] задача (1)–(3) рассмотрена при условии, когда граничное значение φ в угловых точках отделено от точки перегиба $u = 0$ условием

$$\bar{u}_0 < \varphi \le \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

При таком условии для задачи (14)–(16) на роль барьерных подходят гладкие функции “простейшего” вида, пригодные сразу во всей рассматриваемой области. Было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–5 *и в угловых точках* $(k, 0)$ *прямоугольника* Ω*, где* $k = 0$ *или* 1*, функция* $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{\textit{где числа}} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

Если граничные значения $\varphi = \varphi(k)$ *удовлетворяют условию*

$$\bar{u}_0 < \varphi \le \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то для достаточно малых ε *задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x, t, \varepsilon)$*, для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \Big)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Далее считается, что

$$\frac{\bar{u}_0}{2} < \varphi < 0. \tag{17}$$

Ранее с использованием погранслойных функций, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и необходимыми экспоненциальными оценками, были построены так называемые “простейшие” функции

$$Z_1(\xi,\tau) \equiv 0, \quad Z_2(\xi,\tau) = C\exp(-k(\xi+\tau)), \quad Z_3(\xi,\tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)},$$

$$Z_4(\xi,\tau) = -\frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\varphi - \bar{u}_0}.$$

В отдельных случаях такие функции подходят на роль барьерных во всей области $\mathbb{R}^2_+$. При условии (17) эти функции не подходят на роль барьерных для задачи (14)–(16) во всей области $\mathbb{R}^2_+$. Область $\mathbb{R}^2_+$ приходится разбивать на части и в каждой из них строить так называемые кусочно-гладкие барьеры, а затем сглаживать их.

Определение. Для задачи

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D, \quad Z = h \quad \text{на границе } \partial D,$$

функции $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ являются кусочно-гладкими верхним и нижним решениями задачи, если

1) $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$;

2) существует разбиение области D на конечное число подобластей, на внутренности каждой из которой выполняются неравенства

$$L(Z_+) \le 0, \quad L(Z_-) \ge 0, \quad Z_- \le Z_+;$$

3) на границе области D выполняются неравенства

$$Z_- \le h \le Z_+.$$

Лемма 1. *Если в точке* $(0,0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u,0,0,0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0) < 0,$$

то при условии (17) *существует положительное число* ρ_0 *такое, что в области*

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau)|\, \xi \ge \rho_0,\ \tau \ge \rho_0\}$$

функция вида

$$Z_{0-} = -r\exp(-\kappa(\xi+\tau)),$$

где r *и* κ *– некоторые положительные числа, является нижним барьером задачи* (14)–(16).

Доказательство. Требуется доказать,что $L(Z_{0-}) \ge 0$. Пусть

$$s = \Pi_0(0,\tau), \quad t = Q_0(\xi,0), \quad Z = Z_{0-}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$L(Z) = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial\tau} - F(\lambda+Z) + F(\bar{u}_0+s) + F(\bar{u}_0+t) =$$

$$= a^2\kappa^2 Z + \kappa Z - \left[(\lambda+Z)^3 - \bar{u}_0^3\right] + \left[(\bar{u}_0+s)^3 - \bar{u}_0^3\right] + \left[(\bar{u}_0+t)^3 - \bar{u}_0^3\right] =$$

$$= a^2\kappa^2 Z + \kappa Z - \lambda^3 - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 + (\bar{u}_0+s)^3 + (\bar{u}_0+t)^3 - \bar{u}_0^3 =$$

$$= \left[-\lambda^3 + (\bar{u}_0+s)^3 + (\bar{u}_0+t)^3 - \bar{u}_0^3\right] + \left(a^2\kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2\right)Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 =$$

$$= -3st(\bar{u}_0+\lambda) + (a^2\kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2)Z - 3\lambda Z^2 - Z^3.$$

Так как s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$, то при условии (17) первое слагаемое в выражении $L(Z)$ положительно:

$$-3st(\bar{u}_0+\lambda) > 0.$$

Остальная часть $L(Z)$ имеет вид

$$(a^2\kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2)Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = -Z\left[Z^2 + 3\lambda Z + (3\lambda^2 - a^2\kappa^2 - \kappa)\right].$$

Выражение $L(Z)$ будет положительным при условии положительности выражения, стоящего в квадратных скобках:

$$Z^2 + 3\lambda Z + (3\lambda^2 - a^2\kappa^2 - \kappa).$$

Значения $\lambda = \bar{u}_0 + s + t$ заполняют промежуток $(\bar{u}_0, 2\varphi - \bar{u}_0]$. Так как $\bar{u}_0 < 0$, а $2\varphi - \bar{u}_0 > 0$, то λ может принимать нулевое значение, при котором

$$3\lambda^2 - a^2\kappa^2 - \kappa < 0.$$

Чтобы избежать этого нужно воспользоваться монотонным убыванием и стремлением к нулю значений $s = \Pi_0(0,\tau)$ и $t = Q_0(\xi, 0)$ при τ и ξ, стремящихся к ∞. Это позволяет утверждать, что для любого числа $\beta \in (\bar{u}_0, 0)$ существует положительное число ρ_0 такое, что

$$\bar{u}_0 + \Pi_0(0,\rho_0) + Q_0(\rho_0, 0) = \beta < 0, \tag{18}$$

и в области

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau) | \, \xi \ge \rho_0, \ \tau \ge \rho_0\}$$

выполняется неравенство

$$\lambda = \bar{u}_0 + s + t < \bar{u}_0 + \Pi_0(0,\rho_0) + Q_0(\rho_0, 0) = \beta < 0.$$

Тогда дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в квадратных скобках:

$$9\lambda^2 - 4(3\lambda^2 - a^2\kappa^2 - \kappa) = 4(a^2\kappa^2 + \kappa) - 3\lambda^2 < 4(a^2\kappa^2 + \kappa) - 3\beta^2 < 0,$$

если

$$0 < \kappa < \frac{\sqrt{1 + 3a^2\beta^2} - 1}{2a^2}. \tag{19}$$

При выполнении условий (17)–(19) значения $L(Z_{0-}) > 0$ и функция вида

$$Z_{0-} = -r\,\exp(-\kappa(\xi + \tau))$$

является нижним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_0. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Лемма 1 не вносит ограничений на величину коэффициента r у функции Z_{0-}.

После выделения из $\mathbb{R}^2_+$ подобласти Ω_0 оставшуюся часть области $\mathbb{R}^2_+$ разобьем на две подобласти:

$$\Omega_1 = \{(\xi,\tau) | \, \xi \ge \tau, \ 0 \le \tau \le \rho_0\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \{(\xi,\tau) | \, 0 \le \xi \le \rho_0, \ \tau \ge \xi\}.$$

Лемма 2. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0) < 0,$$

то при условии (17) *нижним барьером задачи* (14)–(16) *в области* Ω_1 *является функция вида*

$$Z_{1-}(\xi,\tau) = -h(\tau)\exp(-\kappa\xi),$$

где κ *– достаточно малое положительное число, а функция* $h(\tau)$ *на промежутке* $[0, \rho_0]$ *обладает свойствами*

$$h(\tau) \ge \Pi_0(0,\tau) > 0, \quad h'(\tau) > 0, \quad h''(\tau) < 0. \tag{20}$$

Доказательство. Требуется доказать,что $L(Z_{1-}) \ge 0$. Пусть

$$s = \Pi_0(0,\tau), \quad t = Q_0(\xi, 0), \quad Z = Z_{1-}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$L(Z) = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\lambda + Z) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) =$$

$$= a^2\kappa^2 Z + h'(\tau)\exp(-\kappa\xi) - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 =$$

$$= -3st(\bar{u}_0 + \lambda) + \left[a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3\lambda^2\right] Z - 3\lambda Z^2 - Z^3.$$

Как и в лемме 1 значения

$$-3st(\bar{u}_0 + \lambda) > 0.$$

Остальная часть $L(Z)$ имеет вид

$$\left[a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3\lambda^2\right] Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = -Z\left[Z^2 + 3\lambda Z + \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2\right)\right].$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в квадратных скобках

$$D = 9\lambda^2 - 4\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2\right) = -3\lambda^2 - 4\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - a^2\kappa^2\right) < 0$$

при условии

$$\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - a^2\kappa^2 > 0,$$

что достижимо, если

$$a^2\kappa^2 < \min\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}.$$

Так как функция $h'(\tau)/h(\tau)$ убывает на промежутке $[0, \rho_0]$, то

$$\min\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = \frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)},$$

и нужно иметь

$$a^2\kappa^2 < \frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)}, \quad 0 < \kappa < \frac{1}{a}\sqrt{\frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)}}.$$

С учетом (19) корректируем выбор числа κ:

$$0 < \kappa < \min\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)}}, \frac{\sqrt{1 + 3a^2\beta^2} - 1}{2a^2}\right). \tag{21}$$

При условии (21) выполняется неравенство $L(Z_{1-}) \geq 0$. Лемма 2 доказана.

В области Ω_2 нижний барьер строится симметрично барьеру из области Ω_1, и справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) *нижним барьером задачи* (14)–(16) *в области* Ω_2 *является функция*

$$Z_{2-}(\xi, \tau) = Z_{1-}(\tau, \xi) = -h(\xi)\exp(-\kappa\tau),$$

где $Z_{1-}(\xi, \tau)$ – *функция из леммы* 2.

Лемма 3 завершает построение нижних барьеров для оценки решения задачи (14)–(16) во всех трех областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2, на которые была разделена область $\mathbb{R}_+^2$. Эти барьеры можно непрерывно состыковать друг с другом. Так функции $Z_{1-}(\xi, \tau)$ и $Z_{2-}(\xi, \tau)$ уже по построению непрерывно стыкуются друг с другом на общей границе областей Ω_1 и Ω_2, то есть на отрезке $\xi = \tau$, где $\tau \in [0, \rho_0]$. На общей границе областей Ω_0 и Ω_1, которая представляет собой луч $\tau = \rho_0$, $\xi \in [\rho_0, \infty)$, непрерывную стыковку кусков $Z_{0-}(\xi, \tau)$ и $Z_{1-}(\xi, \tau)$ обеспечивает выбор параметра κ для функции $Z_{0-}(\xi, \tau)$, который остался свободным:

$$h(\rho_0) = r\exp(-\kappa\rho_0).$$

Это же условие обеспечивает непрерывную стыковку кусков $Z_{0-}(\xi, \tau)$ и $Z_{2-}(\xi, \tau)$ на общей границе областей Ω_0 и Ω_2. Таким образом получается кусочно-гладкое нижнее решение задачи (14)–(16).

Далее методами работы [5] проводится процедура сглаживания кусочно-гладкого нижнего решения до гладкого нижнего решения, что приводит к справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) *задача* (14)–(16) *имеет нижнее решение* $Z_-(\xi, \tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида*

$$0 < -Z_-(\xi, \tau) \leq C\exp(-\kappa(\xi + \tau)), \tag{22}$$

где C и κ — некоторые положительные числа.

Теперь перейдем к построению верхнего решения задачи (14)–(16). На этом пути имеются дополнительные трудности, связанные с положительностью свободного члена в выражении $L(Z)$ через Z. Тем не менее, эти трудности удается преодолеть за счет другой техники.

Лемма 4. *Если в точке* $(0,0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u,0,0,0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0) < 0,$$

то при условии (17) *существует положительное число* ρ_0 *такое, что в области*

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau)|\, \xi \ge \rho_0,\ \tau \ge \rho_0\}$$

функция вида

$$Z_{0+} = r\,\exp(-\kappa(\xi+\tau)),$$

где r и κ — некоторые положительные числа, является верхним барьером задачи (14)–(16).

Доказательство. Требуется доказать неравенство $L(Z_{0+}) \le 0$. Вводим обозначения, аналогичные принятым ранее:

$$s = \Pi_0(0,\tau), \quad t = Q_0(\xi,0), \quad Z = Z_{0+}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$L(Z) = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial\tau} - F(\lambda+Z) + F(\bar{u}_0+s) + F(\bar{u}_0+t) =$$

$$= -3st(\bar{u}_0+\lambda) + (a^2\kappa^2+\kappa-3\lambda^2)Z - 3\lambda Z^2 - Z^3.$$

В выражении для $L(Z)$ первое слагаемое оказывается положительным:

$$-3st(\bar{u}_0+\lambda) > 0,$$

поэтому отрицательность $L(Z)$ нужно обеспечить за счет других слагаемых. Воспользуемся оценками

$$0 < s = \Pi_0(0,\tau) \le (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-\kappa_1\tau),$$

$$0 < t = Q_0(\xi,0) \le (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-\kappa_2\xi),$$

где $\kappa_{1,2}$ — некоторые положительные числа. В выражении для Z_{0+} выбираем κ, подчиненное условию

$$0 < \kappa < \min(\kappa_1,\kappa_2). \tag{23}$$

Тогда при ξ и τ, стремящихся к бесконечности, знак $L(Z)$ определяется коэффициентом при Z, который равен

$$a^2\kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2.$$

При ξ и τ, стремящихся к бесконечности, этот коэффициент

$$a^2\kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2 \to a^2\kappa^2 + \kappa - 3\bar{u}_0^2.$$

Последнее выражение будет отрицательным:

$$a^2\kappa^2 + \kappa - 3\bar{u}_0^2 < 0,$$

при следующем условии на выбор κ:

$$0 < \kappa < \frac{\sqrt{1+12\bar{u}_0^2}-1}{2a^2}.$$

Корректируем это с (23) и получаем

$$0 < \kappa < \min\left(\kappa_1, \kappa_2, \frac{\sqrt{1+12\bar{u}_0^2}-1}{2a^2}\right). \tag{24}$$

При ξ и τ, стремящихся к бесконечности, $L(Z)$ эквивалентно величине

$$L(Z) \sim (a^2\kappa^2 + \kappa - 3\bar{u}_0^2)Z < 0,$$

поэтому существует положительное число ρ_0 такое, что в области

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau) | \, \xi \geq \rho_0, \ \tau \geq \rho_0\}$$

выполняется неравенство $L(Z_{0+}) \leq 0$, и, таким образом, функция вида

$$Z_{0+} = r \, \exp(-\kappa(\xi + \tau))$$

является верхним барьером задачи (14)—(16) в области Ω_0. Лемма 4 доказана.

Как и ранее оставшуюся часть области $\mathbb{R}^2_+$ разбиваем на две подобласти

$$\Omega_1 = \{(\xi,\tau) | \, \xi \geq \tau, \ 0 \leq \tau \leq \rho_0\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \{(\xi,\tau) | \, 0 \leq \xi \leq \rho_0, \ \tau \geq \xi\}.$$

Лемма 5. *Если в точке* $(0,0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u,0,0,0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \textit{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0) < 0,$$

то при условии (17) *верхним барьером задачи* (14)—(16) *в области* Ω_1 *является функция вида*

$$Z_{1+}(\xi,\tau) = h(\tau)\exp(-\kappa\xi),$$

где κ — *достаточно малое положительное число, а функция* $h(\tau)$ *на промежутке* $[0, \, \rho_0]$ *обладает свойствами*

$$h(\tau) > 0, \quad h'(\tau) > 0, \quad h''(\tau) < 0. \tag{25}$$

Доказательство. Требуется доказать,что $L(Z_{1+}) \leq 0$. Пусть

$$s = \Pi_0(0,\tau), \quad t = Q_0(\xi,0), \quad Z = Z_{1+}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$L(Z) = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\lambda + Z) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) =$$

$$= a^2\kappa^2 Z - h'(\tau)\exp(-\kappa\xi) - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 =$$

$$= \left(a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right) Z - 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} Z - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 =$$

$$= \left(a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - 3\lambda^2\right) Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 =$$

$$= -Z\left[-\left(a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - 3\lambda^2\right) + 3\lambda Z + Z^2\right] =$$

$$= -Z\left[Z^2 + 3\lambda Z + \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2\right)\right].$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках, через $H(Z)$:

$$H(Z) = Z^2 + 3\lambda Z + q,$$

$$\text{где} \quad q = \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2.$$

Требуется доказать, что $H(Z) \geq 0$. Сначала добьемся положительности q. Имеем

$$q \geq \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - a^2\kappa^2 = \frac{1}{h(\tau)}\left[h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\exp(\kappa\xi)\right] - a^2\kappa^2.$$

Чтобы удовлетворить неравенству

$$h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\exp(\kappa\xi) > 0,$$

воспользуемся оценками

$$0 < s = \Pi_0(0,\tau) \leq (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-\kappa_1\tau),$$

$$0 < t = Q_0(\xi, 0) \leq (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-\kappa_2\xi),$$

где $\kappa_{1,2}$ — некоторые положительные числа. Считая, что

$$0 < \kappa < \min(\kappa_1, \kappa_2), \tag{26}$$

имеем

$$0 < t\exp(\kappa\xi) \leq (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-\kappa_2\xi)\exp(\kappa\xi) = (\varphi - \bar{u}_0)\exp(-(\kappa_2 - \kappa)\xi) < \varphi - \bar{u}_0.$$

Величина

$$0 < -(\bar{u}_0 + \lambda) < -2\bar{u}_0.$$

Таким образом,

$$0 < -3st(\bar{u}_0 + \lambda)\exp(\kappa\xi) < -6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2,$$

или

$$3st(\bar{u}_0 + \lambda)\exp(\kappa\xi) > 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2,$$

поэтому функцию $h(\tau)$ подчиняем условию

$$h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\exp(\kappa\xi) > h'(\tau) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2 > 0.$$

Учитывая, что $h'(\tau)$ убывает на промежутке $[0, \rho_0]$, требуем, чтобы

$$h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2 > 0. \tag{27}$$

Теперь, чтобы q было положительным, нужно скорректировать выбор κ:

$$q \geq \frac{1}{h(\tau)}\left[h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\exp(\kappa\xi)\right] - a^2\kappa^2 \geq \frac{1}{h(\rho_0)}\left[h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2\right] - a^2\kappa^2 \geq \delta > 0$$

при условии

$$0 < a^2\kappa^2 < \frac{1}{h(\rho_0)}\left[h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2\right] - \delta,$$

или

$$0 < \kappa < \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{h(\rho_0)}\left[h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2\right] - \delta},$$

где δ — какое-либо число из промежутка

$$0 < \delta < \frac{1}{h(\rho_0)}\left[h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2\right]. \tag{28}$$

Выбор κ корректируем с условием (26):

$$0 < \kappa < \min\left(\kappa_1, \kappa_2, \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{h(\rho_0)}\left[h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2\right] - \delta}\right).$$

При наложенных выше условиях дискриминант квадратного трехчлена $H(Z)$ равен

$$D = 9\lambda^2 - 4q = 9\lambda^2 - 4\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2\right) =$$

$$= -3\lambda^2 - 4\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda)\frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - a^2\kappa^2\right) < 0.$$

Таким образом, $H(Z) > 0$, а $L(Z) < 0$. Лемма 5 доказана.

В области Ω_2 верхний барьер строится симметрично барьеру из области Ω_1, и справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) *верхним барьером задачи* (14)–(16) *в области* Ω_2 *является функция*

$$Z_{2+}(\xi, \tau) = Z_{1+}(\tau, \xi) = h(\xi)\exp(-\kappa\tau),$$

где $Z_{1+}(\xi, \tau)$ – *функция из леммы* 5.

Аналогично теореме 2 получается следующее утверждение.

Теорема 3. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) *задача* (14)–(16) *имеет верхнее решение* $Z_+(\xi, \tau)$*, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида*

$$0 < Z_+(\xi, \tau) \le C\exp(-\kappa(\xi + \tau)), \tag{29}$$

где C *и* κ – *некоторые положительные числа.*

Применение метода верхних и нижних решений и учет оценок (22) и (29) позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) *задача* (14)–(16) *имеет решение* $P_0(\xi, \tau)$*, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида*

$$|P_0(\xi, \tau)| \le C\exp(-\kappa(\xi + \tau)), \tag{30}$$

где C *и* κ – *некоторые положительные числа.*

Последующие члены угловой части асимптотики $P_k(\xi, \tau)$, $k \ge 1$, определяются из линейных задач (10)–(12), рассматриваемых в области $\mathbb{R}_+^2$:

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)P_k + h_k,$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0),$$

$$P_k(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty,$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \le C\exp(-\kappa(\xi + \tau)),$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции $P_0, \ldots, P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

В силу оценок для функций Π_0, Q_0 и P_0 можно гарантировать существование положительного числа ϱ такого, что при $\xi + \tau \ge \varrho$ значения $\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0$ будут $\le -\delta$, где δ – некоторое положительное число. При таких значениях переменных ξ, τ в силу свойств функции F коэффициент $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ будет положительным и отграниченным от нуля:

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \ge F'(-\delta) > 0.$$

Это обстоятельство позволяет использовать результаты работы [15] и доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Если в точке* $(0, 0)$ *прямоугольника* Ω *функция* $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) *задачи* (10)–(12) *имеют решения* $P_k(\xi, \tau)$*, которые удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида* (30).

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \ge 0$, ставятся и решаются аналогично. Асимптотический ряд (5) оказывается полностью построенным. Остается обосновать асимптотическую сходимость этого ряда к решению задачи (1)–(3).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* 1–5 *и в угловых точках* $(k, 0)$ *прямоугольника* Ω, *где* $k = 0$ *или* 1, *функция* $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ *имеет вид*

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа} \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

Если граничные значения $\varphi = \varphi(k)$ *удовлетворяют условию*

$$\frac{\bar{u}_0}{2} < \varphi < 0,$$

то для достаточно малых ε *задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x, t, \varepsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \Big)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k \geq 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из работы [3]. При этом используется универсальный метод дифференциальных неравенств (см. [10]).

Замечание 2. Функция F в различных угловых точках не обязательно должна иметь один и тот же вид. Все результаты работ [3]–[9] сохраняются, если в каждой угловой точке функция F имеет один из рассмотренных в этих работах вид.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено описание углового пограничного слоя для задач с кубическими нелинейностями при условии, что граничные значения берутся вплоть до точки перегиба. Основной проблемой было доказательство разрешимости нелинейных краевых задач. В отличие от предыдущих работ это потребовало конструирования более сложных барьерных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 12. № 3. 1972. С. 582–597.

2. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестн. Московского университета. Сер. 15: Вычисл. матем. и кибернетика. 1978. № 2. С. 49–56.

3. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 57. № 2. 2017. С. 255–274.

4. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 58. № 4. 2018. С. 575–585.

5. *Денисов А.И., Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59. № 1. 2019. С. 102–117.

6. *Денисов А.И., Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59. № 9. 2019. С. 1581–1590.

7. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 61. № 2. 2021. С. 256–267.

8. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 61. № 11. 2021. С. 1894–1903.

9. *Денисов А.И., Денисов И.В.* Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышёвский сб. Т. 24. Вып. 1 (88). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2023.

10. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. ур-ния. Т. 31. № 4. 1995. С. 719–723.

11. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.

12. *Amann H.* On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. № 2. P. 125–146.

13. *Sattinger D.H.* Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1000.

14. *Amann H.* Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. New York etc: Acad press, cop. 1978. XIII. P. 1–29.

15. *Денисов И.В.* Первая краевая задача для линейного параболического уравнения в пространстве $\mathbb{R}_+^{n+1}$ // Дифференц. ур-ния. Т. 34. № 12. 1998. С. 1616–1623.

NONLINEAR METHOD OF ANGULAR BOUNDARY FUNCTIONS UNDER THE INFLUENCE OF THE INFLECTION POINT

A. I. Denisov[a,]* and I. V. Denisov[a]

[a] *L. N. Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, 300026 Russia*
**e-mail: den_tspu@mail.ru*

Received: 10 March 2024
Revised: 10 March 2024
Accepted: 26 September 2024

Abstract. In the rectangle $\Omega = \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ the initial boundary value problem for the singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T.$$

is considered. It is assumed that at the angular points $(k,0)$ of the rectangle Ω, where $k = 0$ or 1, the function $F(u) = F(u,k,0,0)$ takes the form

$$F(u) = u^3 - u_0^3, \quad \text{где} \quad u_0 = u_0(k) < 0.$$

The nonlinear method of angular boundary functions is used to construct the asymptotics of the solution to the problem. Earlier, we considered the case when the boundary value of φ at the angular points is separated from the inflection point $u = 0$ by the condition

$$u_0(k) < \varphi(k) \le \frac{u_0(k)}{2} < 0,$$

at which functions of the “simplest” form suitable in the entire domain in question fitted to the role of barrier functions. In this work, the case

$$\frac{u_0(k)}{2} < \varphi(k) < 0$$

is considered, where the domain has to be divided into parts, the barrier functions have to be constructed in each subdomain taking into account their continuous junction at the common boundaries of the subdomains, and then the piecewise continuous lower and upper solutions have to be smoothed. As a result, a complete asymptotic expansion of the solution when $\varepsilon \to 0$ is obtained and its uniformity in the closed rectangle is justified.

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation